リスク管理のための

統計・確率入門

碓井　茂樹
CIA、CCSA、FCSA

本稿に記載の意見は筆者の個人的な見解にもとづくもので、筆者が所属する組織の代表的な見解を示すものではない。

第1部　イントロダクション

- リスクとは、リスクマネジメントとは
- リスクの計量化とは
- VaR(Value at Risk)の概念、活用事例

第2部　統計・確率の基礎知識

- 基本統計量
  （平均、分散、標準偏差、パーセント点、共分散、相関係数）
- 確率変数と確率分布
- 推定と検定

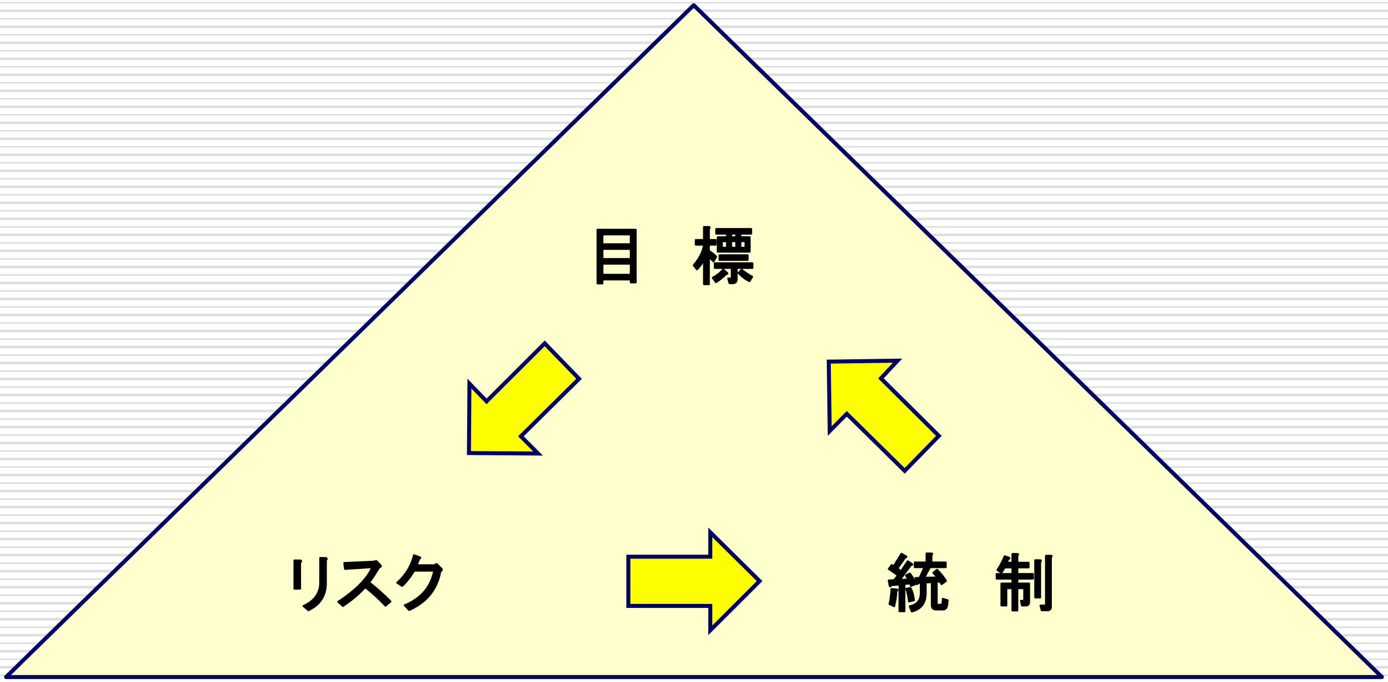
イントロダクション

目　　次

１．リスクの定義

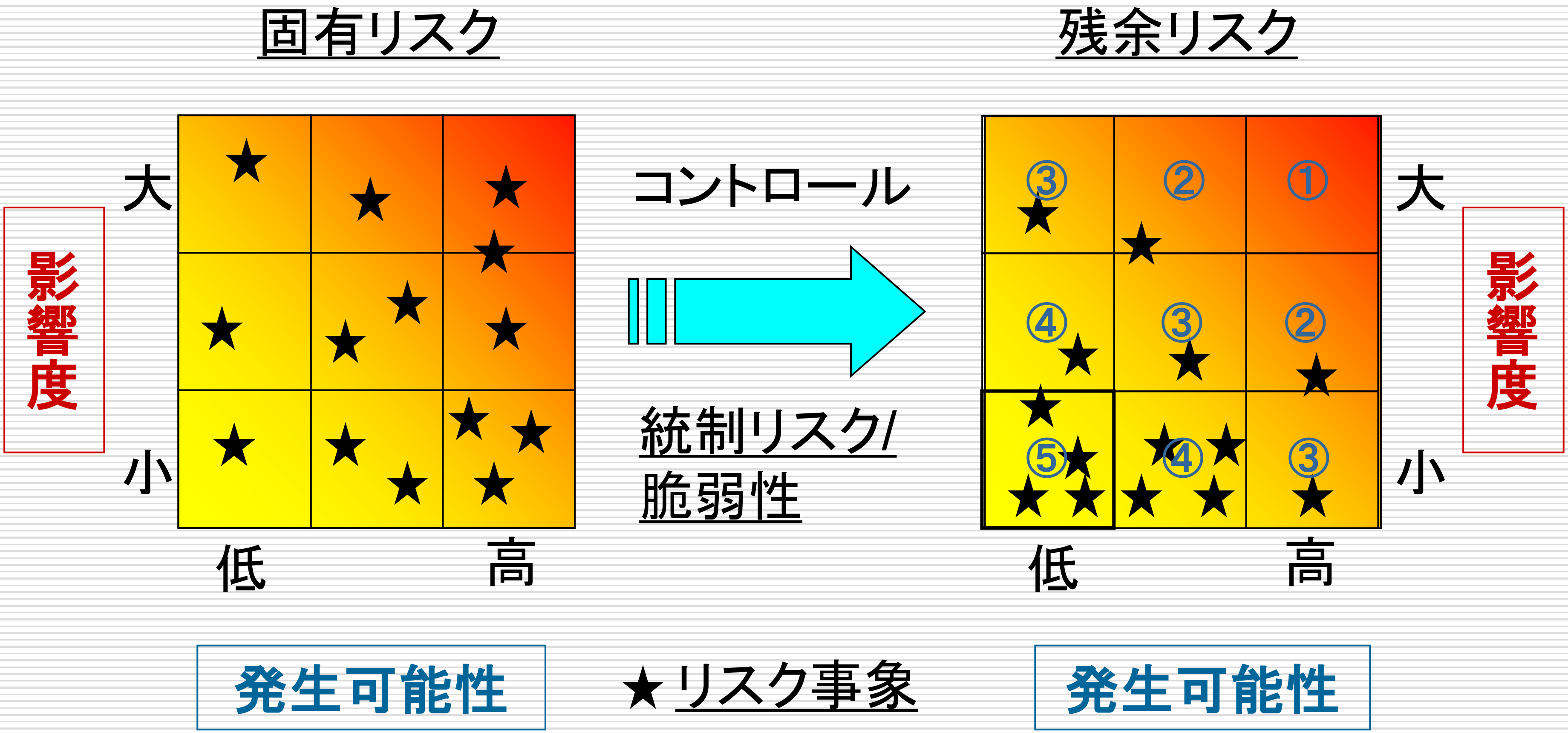
- 組織の目標・目的の達成に（マイナスの）影響を与える事象の発生可能性
- 影響の大きさと発生の可能性に基づいて測定される

目標･リスク･統制



リスクマネジメント

リスク･マップ



固有リスク
残余リスク
大
小
低
高
影響度
コントロール
統制リスク/脆弱性
③
②
①
④
③
②
⑤
④
③
発生可能性
★リスク事象

固有リスク

- コントロール等が全く整備されていないと仮定した場合に存在するリスク

残余リスク

- 不利な事象の影響と発生の可能性を軽減する措置（コントロール等）を講じた後にさらに残るリスク

統制リスク／脆弱性

- 機能しないコントロール手続きに依存するリスク

統制リスク	小さい	大きい
脆弱性	低い	高い
コントロール	強い （有効である）	弱い （有効でない）

2. リスクマネジメント

- 組織の目標・目的の達成に関して合理的保証を提供するため、発生する可能性のある事象や状況を識別、評価、管理、コントロールするプロセス

1.組織の目標・目的の確立

2.リスクの識別/評価/優先順位付け

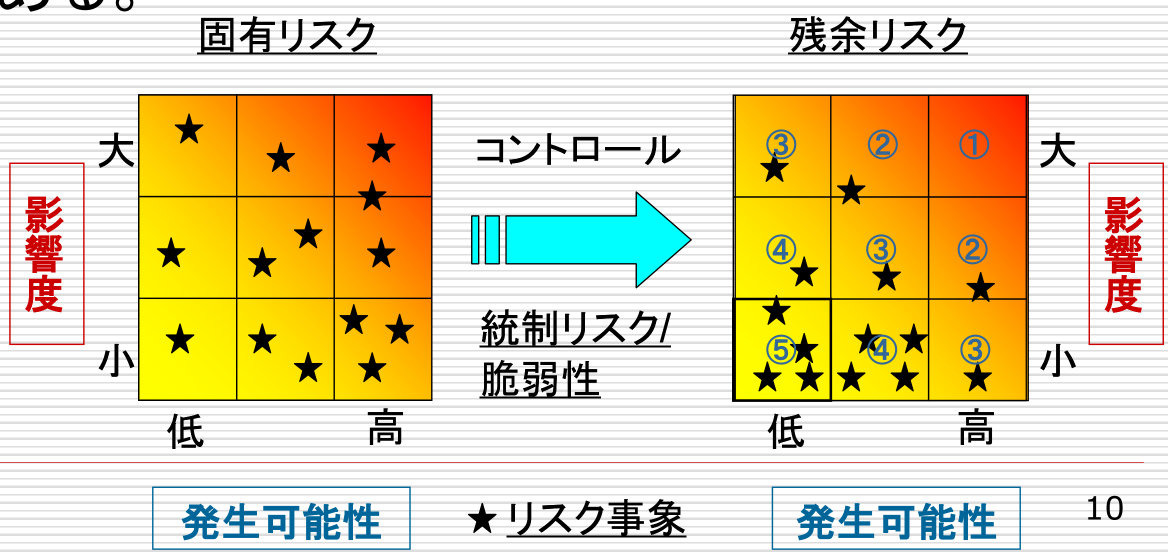
3.コントロール等のリスク軽減措置

4.モニタリング/修正

リスク評価の様々な手法

① リスクマップ方式

- 残余リスクでみて、右上の領域（影響度が大きく、発生可能性が高い）の方が重要度が高いと評価するのが一般的。
- 固有リスクでみて、影響度が大きい方が重要度が高いと評価することもある。
- 残余リスクでみて、発生可能性が高い方が重要度が高いと評価することもある。



② スコアリング方式

- 「影響度」、「発生可能性」、「コントロールの有効性」を評点化し、乗じることによって、残余リスクを評点化する。
- 「残余リスク」の評点に「閾値」を設けて、重要度を評価するのが一般的。
- 固有リスクの「影響度」や「コントロールの有効性」の評点に「閾値」を設けて、重要度を評価することもある。

（例）

リスク内容	固有リスク		コントロール	残余リスク
	影響度（評点A）	発生可能性（評点B）	有効性（評点C）	評価（評点A×B－C）
XXXXX	○点	△点	◇点	○×△－◇点
XXXXX	●点	▲点	◆点	●×▲－◆点
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

③ リスク計量化方式

- 残余リスクの「影響度」を金額ベースに換算し、それぞれの「発生可能性」の想定（○年に1回）を置く。
- 「影響度」が一定金額を超えたり、「発生可能性」が一定頻度を超えるとき、重要度が高いと評価する。

（例）

リスク内容	影響度			発生頻度	統制上の改善点
	直接費用	間接費用	その他		
XXXXX	○円	○円		○年に1回	×××××
XXXXX	△円	△円	顧客の信用を毀損	△年に1回	×××××
XXXXX	◇円	◇円		◇年に1回	×××××
XXXXX	●円	●円	顧客の信用を毀損	●年に1回	×××××
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

共通点、相違点

（共通点）

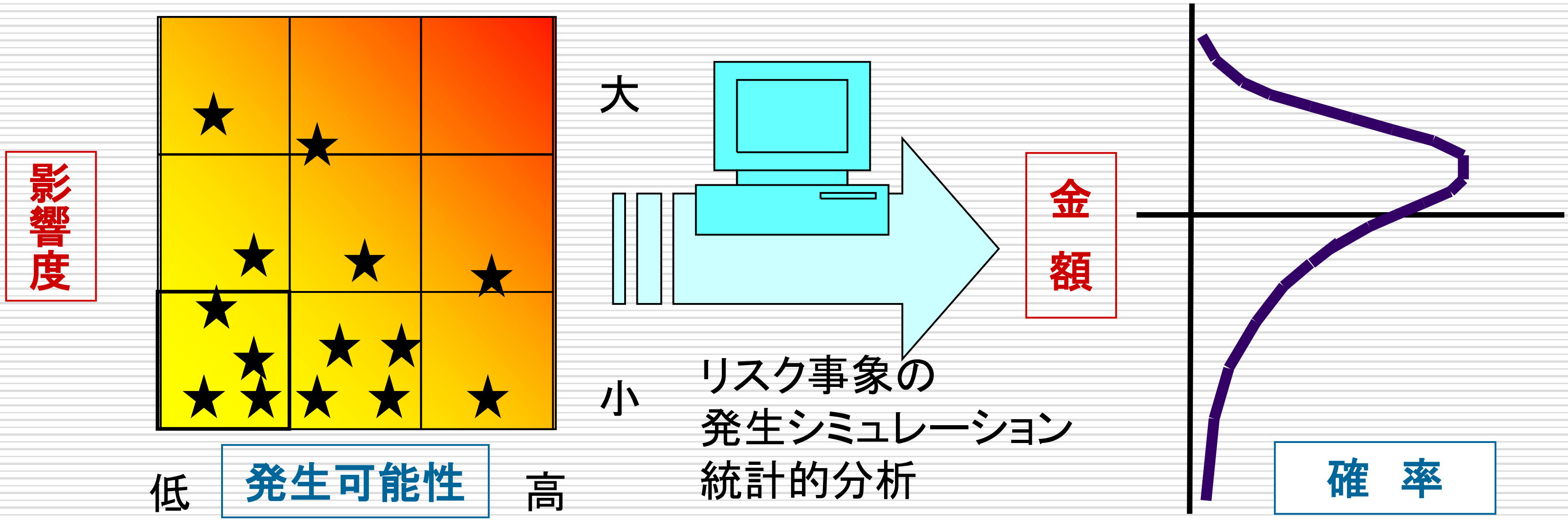
- リスクマップ方式、リスク評点化方式、リスク計量化方式いずれの方式でも、リスクの重要度や優先順位を決めることは可能。

（相違点）

- しかし、当該組織の収益・経営体力と対比して過大なリスクを負っているか否かは、リスク計量化方式でないと判定できない。

3. リスクの計量化

- リスク事象の「影響度」を金額換算し、「発生可能性」を確率であらわす。
- リスク事象の発生シミュレーションや統計的分析により、経営に与える影響を把握する。

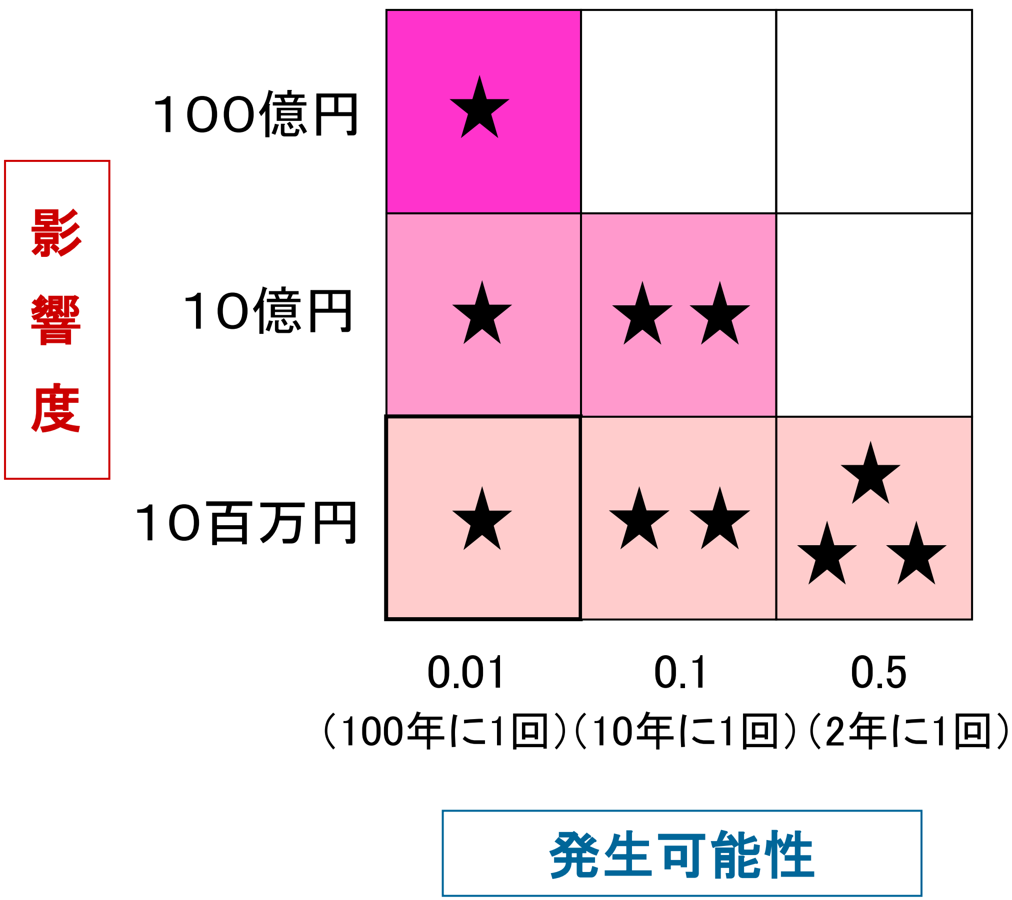


（設例）

- あなたは、ある企業の社長です。
- 自己資本は100億円です。
- 業績は安定していて、年商100億円、毎年5億円の営業利益を計上しています。
- ある日、内部監査部門長から、過去のデータにもとづき、10個の無視できないリスク（次頁参照）があることが分かった、と報告を受けました。
- 早急に手を打つ必要がありますか？
- あなたなら、どう考え、どう対処しますか？

新たに判明した10個のリスク

（注）10個のリスク事象は、独立して発生する。



リスク事象	損失（億円）	発生確率
risk1	０．１	０．５
risk2	０．１	０．５
risk3	０．１	０．５
risk4	０．１	０．１
risk5	０．１	０．１
risk6	０．１	０．０１
risk7	１０	０．１
risk8	１０	０．１
risk9	１０	０．０１
risk10	１００	０．０１

（ヒント）

- １０個のリスク事象が全く起きなければ損失額はゼロ。
- １０個のリスク事象がすべて起きたときの最大損失額は１３０．６億円。
- １０個のリスク事象が起きるか起きないか、全部で 2^{10}（＝１０２４）通りのケースがある。
- それぞれのケースで発生する損失額や発生確率を計算することはできるが・・・

（ヒント）

- 平均的な損失額はいくらか？
- 平均的な損失額の発生に備えるだけで十分か？
- では、どの程度の損失額の発生に備えたらよいのか？
- 最大損失額（１３０．６億円）の発生に備える必要があるか？

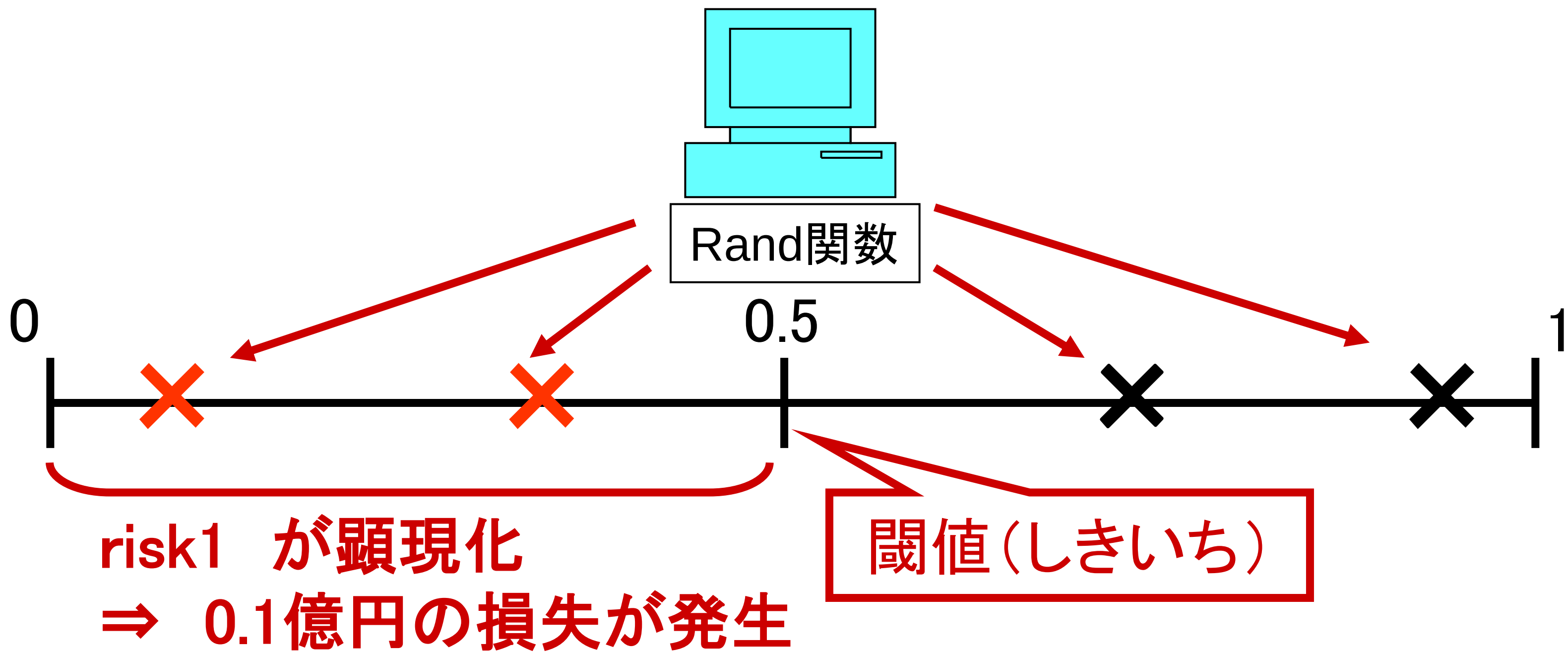
- 収益（営業利益５億円）と経営体力（自己資本１００億円）がリスク顕現化時の損失を吸収するバッファーと考える。

（実験）

- パソコンで、リスク事象を発生させてみよう。

ExcelのRand関数　を使って、
０～１の値をとる乱数（一様乱数）を発生させる。

（例）risk1の場合
乱数（一様乱数）の値が　0.5　以下のとき
risk1（発生確率　0.5 ）が発生したと考える。



	risk1	risk2	risk3	risk4	risk5	risk6	risk7	risk8	risk9	risk10
金額	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	10	10	10	100
確率	0.5	0.5	0.5	0.1	0.1	0.01	0.1	0.1	0.01	0.01

試行	乱数1	乱数2	乱数3	乱数4	乱数5	乱数6	乱数7	乱数8	乱数9	乱数10
1	0.245	0.059	0.004	0.110	0.364	0.431	0.778	0.785	0.598	0.487
2	0.548	0.387	0.884	0.398	0.977	0.587	0.334	0.724	0.172	0.383
3	0.291	0.257	0.202	0.384	0.248	0.166	0.200	0.944	0.351	0.862
4	0.768	0.380	0.934	0.075	0.587	0.495	0.808	0.101	0.721	0.605
5	0.250	0.267	0.955	0.140	0.957	0.505	0.744	0.716	0.113	0.097
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

	risk1	risk2	risk3	risk4	risk5	risk6	risk7	risk8	risk9	risk10
金額	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	10	10	10	100
確率	0.5	0.5	0.5	0.1	0.1	0.01	0.1	0.1	0.01	0.01

試行	損失1	損失2	損失3	損失4	損失5	損失6	損失7	損失8	損失9	損失10	損失計
1	0.100	0.100	0.100	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.300
2	0.000	0.100	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.100
3	0.100	0.100	0.100	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.300
4	0.000	0.100	0.000	0.100	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.200
5	0.100	0.100	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.200
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

:リスク事象（損失）が発生した箇所

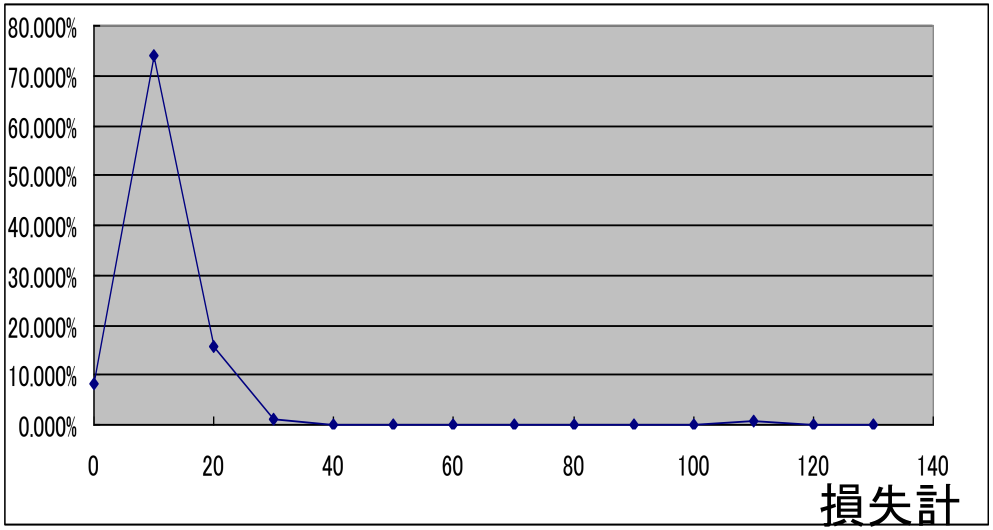
シミュレーション結果（試行回数：1万回）

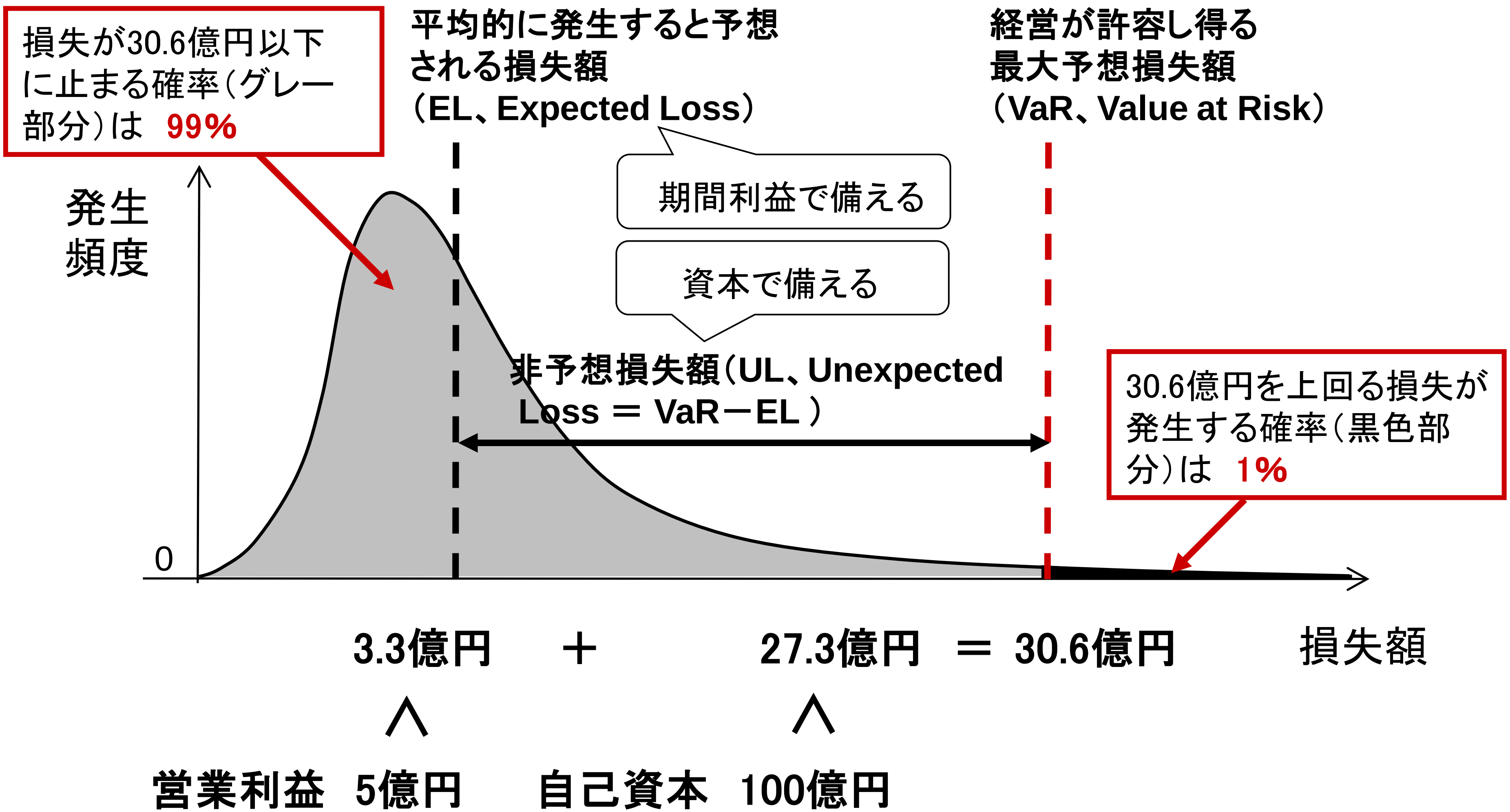
損失計	確率	累計
0	7.740%	7.740%
～ 10	73.470%	81.210%
～ 20	16.650%	97.860%
～ 30	1.120%	98.980%
～ 40	0.020%	99.000%
～ 50	0.000%	99.000%
～ 60	0.000%	99.000%
～ 70	0.000%	99.000%
～ 80	0.000%	99.000%
～ 90	0.000%	99.000%
～ 100	0.080%	99.080%
～ 110	0.780%	99.860%
～ 120	0.130%	99.990%
～ 130	0.010%	100.000%
130超	0.000%	100.000%

平均値	
理論値	3.3
試行値	3.3

	パーセント点
90.00%	10.2
95.00%	10.3
99.00%	30.6
99.50%	100.2
99.90%	110.1
99.95%	110.3

確率分布



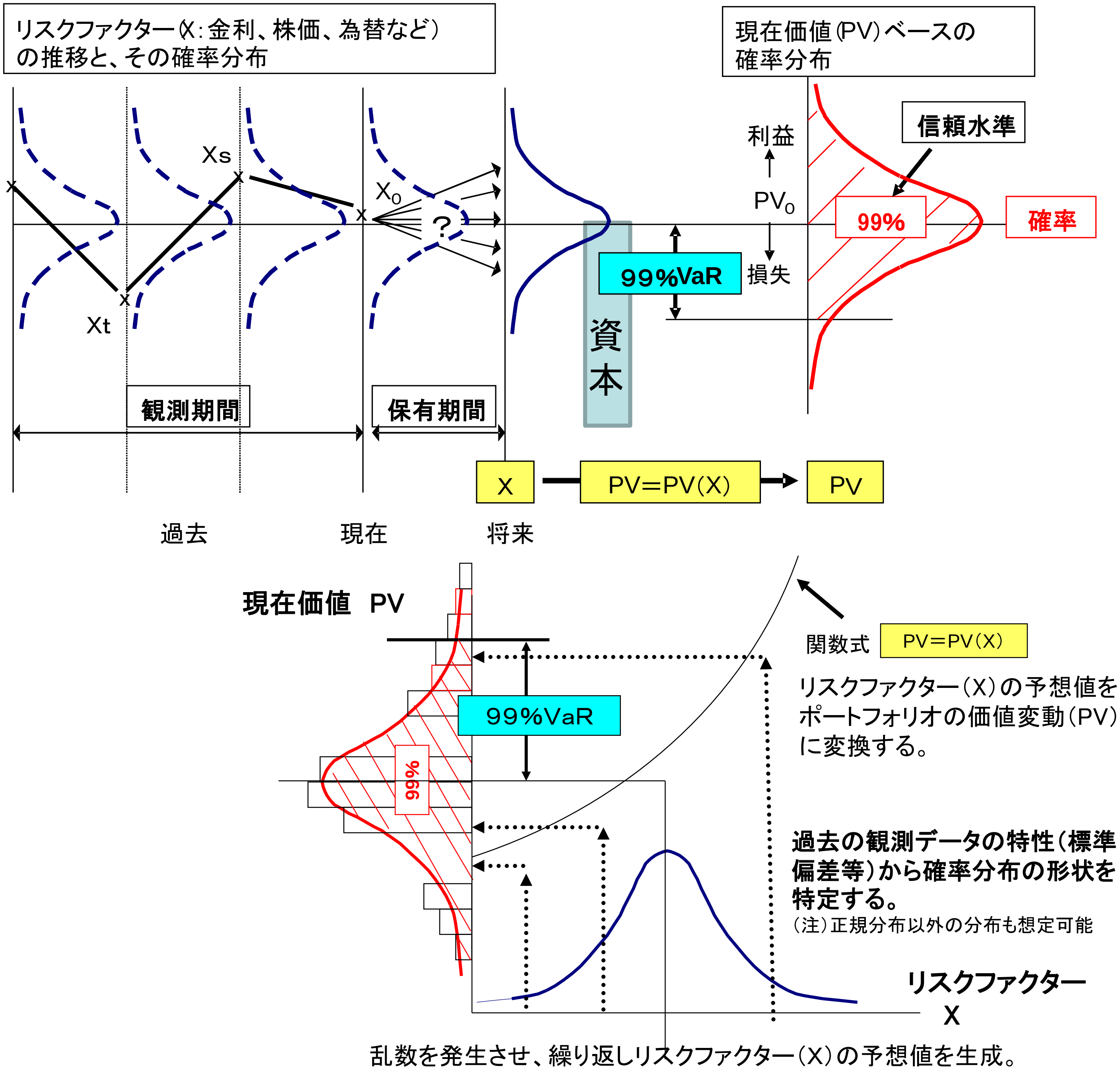


- 平均的にみて、期間利益の計上が可能。
- 自己資本をすべて毀損してしまう確率は1%未満。

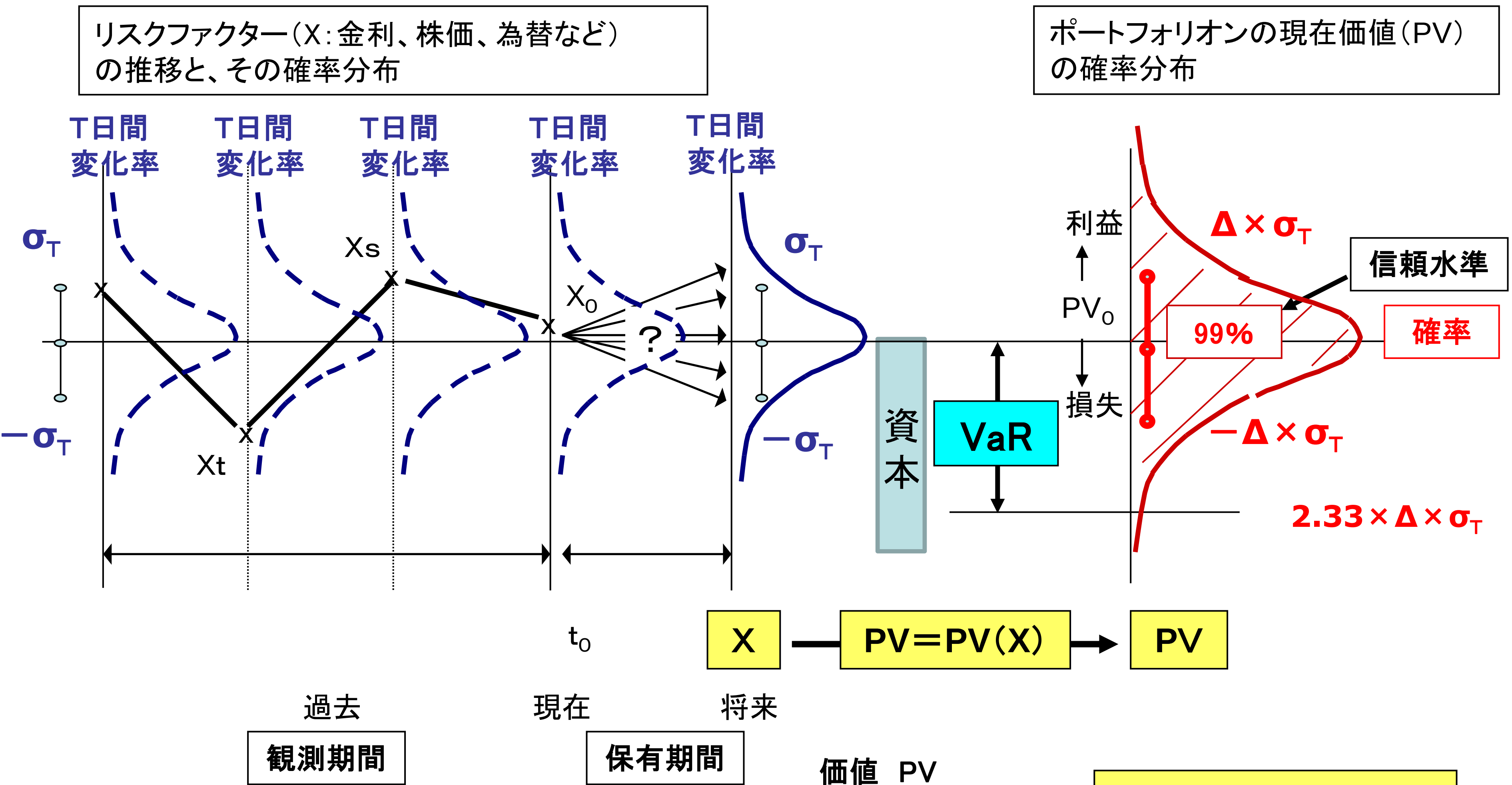
４．VaR（バリュー・アット・リスク）

市場VaRの起源

- 　JPモルガンの最高経営責任者　D．Weatherstoneは、今後24時間に自社のポートフォリオが受けるリスクを計量化することを求めた。毎日16時15分、その計測結果をチェックすることを望んだ。
- 　これに対し、JPモルガンのスタッフは、金利、株式、為替などの過去の観測データからある確率をもって発生し得る最大損失額を予想することを提案し、その計測モデルを開発した。



リスクファクター(X:金利、株価、為替など)の推移と、その確率分布
現在価値(PV)ベースの確率分布
Xs
X0
Xt
?
利益
PV0
損失
信頼水準
99%
確率
99%VaR
資本
観測期間
保有期間
X
PV=PV(X)
PV
過去
現在
将来
現在価値 PV
99%VaR
99%
関数式
PV=PV(X)
リスクファクター(X)の予想値をポートフォリオの価値変動(PV)に変換する。
過去の観測データの特性(標準偏差等)から確率分布の形状を特定する。
(注)正規分布以外の分布も想定可能
リスクファクター X
乱数を発生させ、繰り返しリスクファクター(X)の予想値を生成。

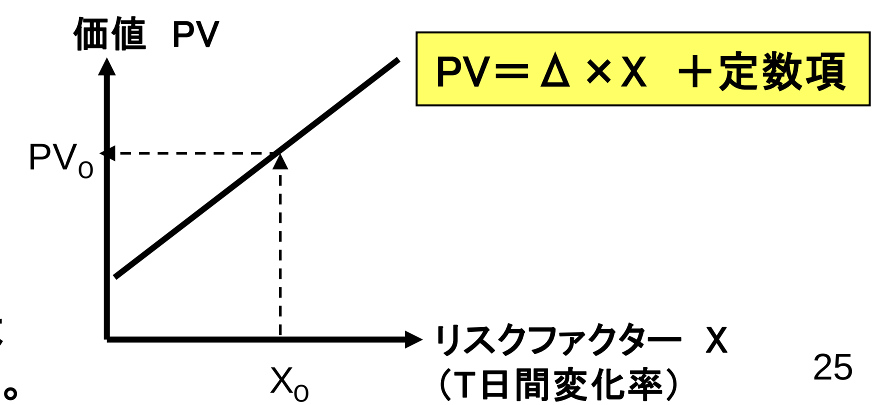


仮定①

リスクファクターの確率分布は
正規分布（ i. i. d. ）

仮定②

Δは一定、すなわち、ポートフォリオ価値PVは
リスクファクターの１次関数としてあらわされる。



		信頼係数		感応度		ボラティリティ
VaR	＝	2．33	×	Δ	×	σ_T

- VaRは、リスクファクターのボラティリティと、リスクファクターの変動に対する現在価値の感応度を考慮したリスク指標。

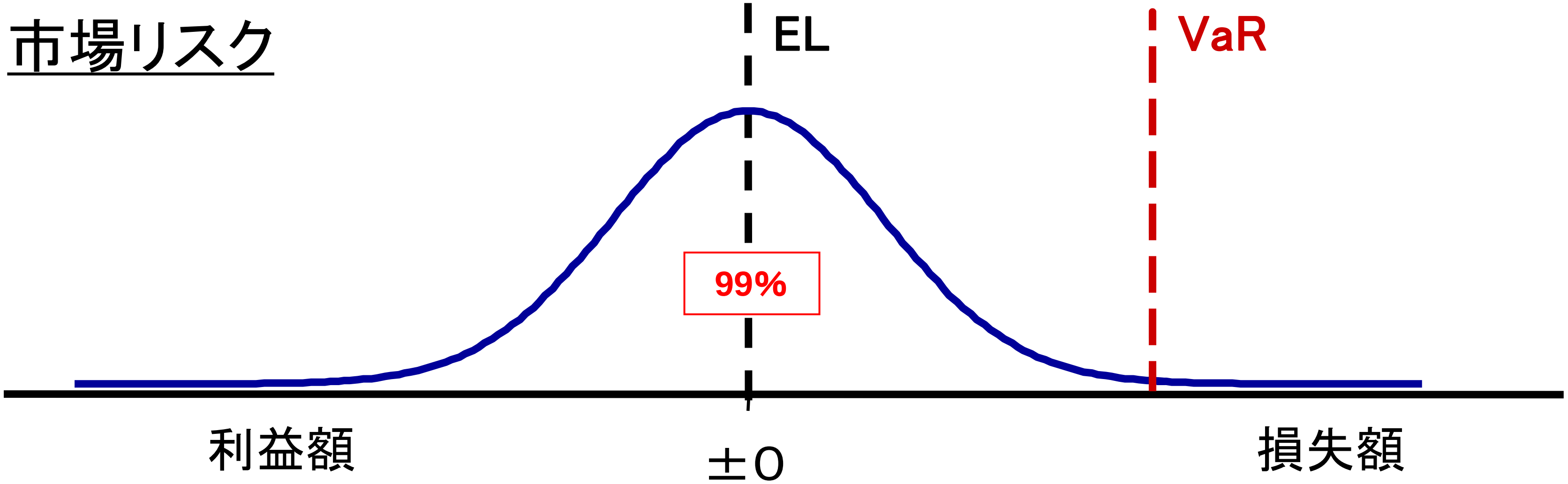
ボラティリティ　＝　リスクファクターがどれだけ変動するか
（σ_T：　変化率の標準偏差）

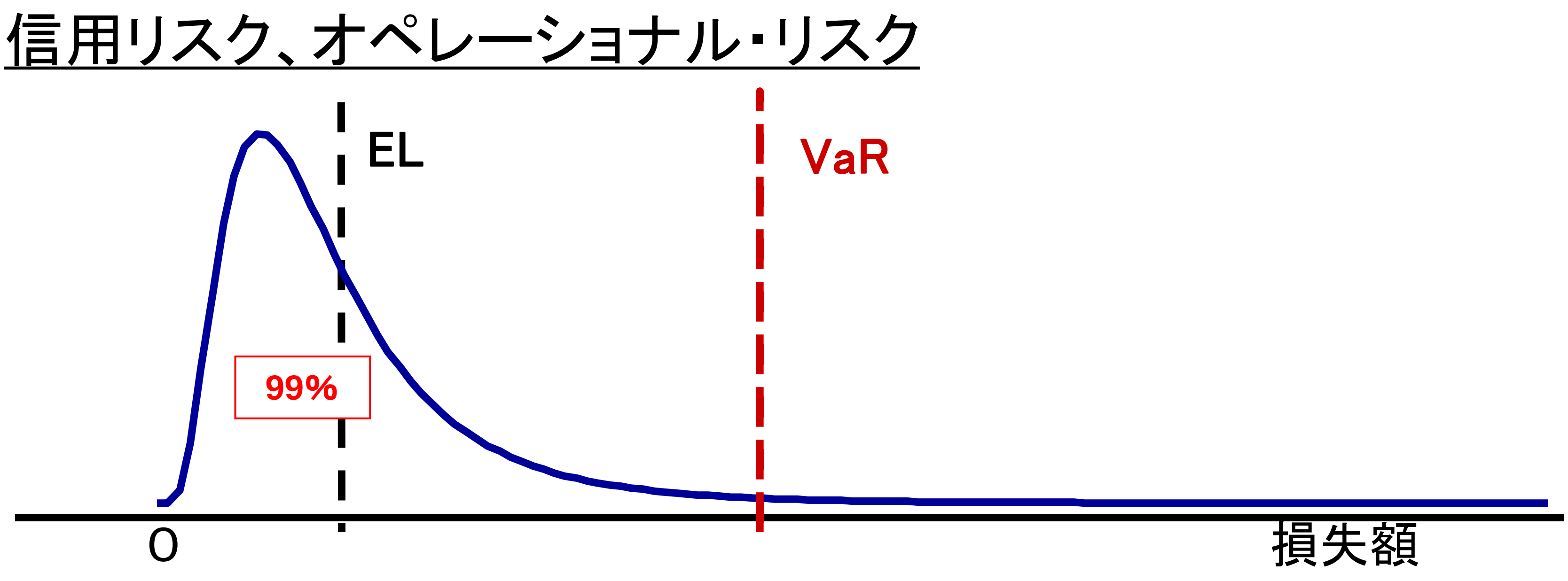
感応度　＝　ポートフォリオの現在価値の変動は、
リスクファクターの変動を受けて
どれだけ増幅されるか
（Δ：　関数式の傾き）

VaRの発展

- 　VaRの計測モデルは改良が加えられ、様々な計測手法が開発された。
  ⇒　分散共分散法、モンテカルロ・シミュレーション法、
  ヒストリカル法。
- 　リスクの計測対象も、市場リスク以外にも、貸し倒れなどの信用リスクや、事件・事故、システム障害、災害など業務全般に係るオペレーショナル・リスクに拡大。
- 　最近では、各リスクカテゴリーのリスクを VaR という共通の尺度で測定して、リスクを統合管理する企業・金融機関が増加している。

リスクカテゴリー別に見た損失分布（イメージ）





VaRを定義する

① 過去の一定期間(観測期間)の変動データにもとづき、

② 将来のある一定期間(保有期間)のうちに

③ ある一定の確率(信頼水準)の範囲内で

④ 被る可能性のある最大損失額を

⑤ 統計的手法により推定した値をVaR として定義する。

ＶａＲの特徴を一言でいうと

- 「過去」のデータを利用して
- 統計的手法で「推定」される
- 「確率」を伴うリスク指標

VaR（バリュー・アット・リスク）は

- どのくらいの損失が、どのくらいの確率で起きるかが分かる、画期的なリスク指標である。
- しかも、過去のデータに基づき統計的手法を用いて求められるため、客観性が高い。
- そのため、株主、顧客、当局に対する説得力が高い。

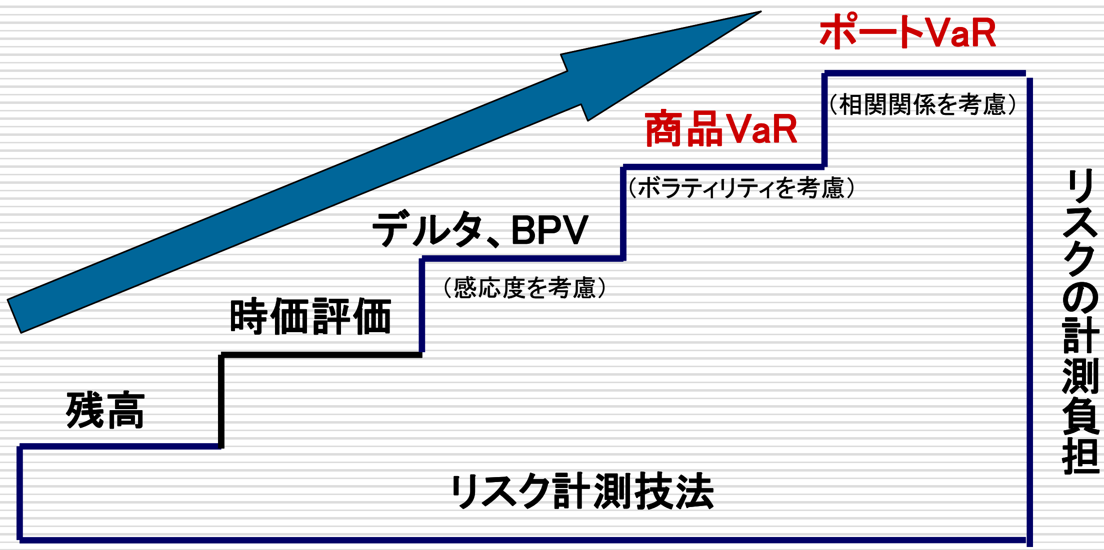
VaR（バリュー・アット・リスク）は

- 統計的手法によって求められる指標であるため、その「前提」を確認する必要がある。
- 厳密にいえば、統計的に「推定」された値であり、使用に耐えられるか、バックテストなどで統計的に「検証」する必要がある。
- 「過去は繰り返す」という考え方に基づいて求められているため、予測値としては「限界」がある。ストレス・テストなどで「補完」する必要がある。

５. VaRの活用事例

市場リスクの管理

- 　金融商品、ポートフォリオの現在価値の変動リスクを把握するために、多くの投資家、証券会社、金融機関等でＶａＲが広く活用されるようになった。



みずほフィナンシャルグループの ディスクロージャー誌より

トレーディング業務における市場リスク量（VAR）の年度別推移

（単位:億円）

	平成16年度	平成17年度	平成18年度	増　減
年度末日	22	51	39	△12
最大値	43	55	65	10
最小値	20	20	32	12
平均値	29	32	43	11

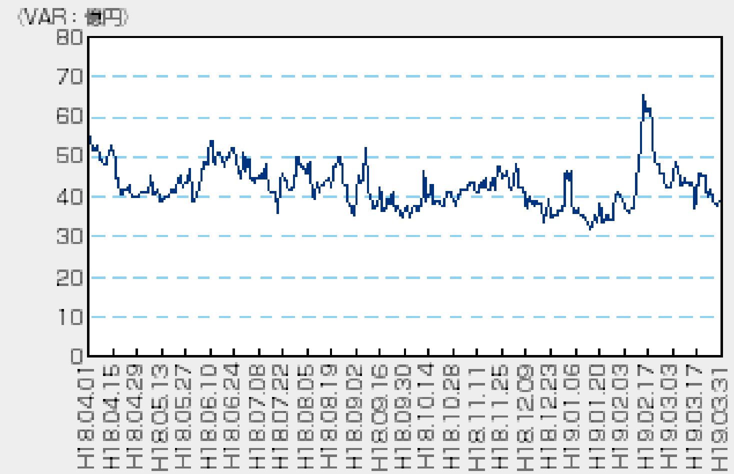
トレーディング業務のVAR計測手法

VAR計測手法

線　形リスク：分散・共分散法
非線形リスク：モンテカルロシミュレーション法
VAR　：線形リスクと非線形リスクの単純合算
定量基準　：① 信頼区間　片側99%
② 保有期間　1日
③ 観測期間　1年

トレーディング業務

業務目的　：市場価格の短期的な変動、市場間の価格差等を利用して利益を得る業務
計測範囲　：特定取引勘定等、トレーディング業務の目的で行われた取引



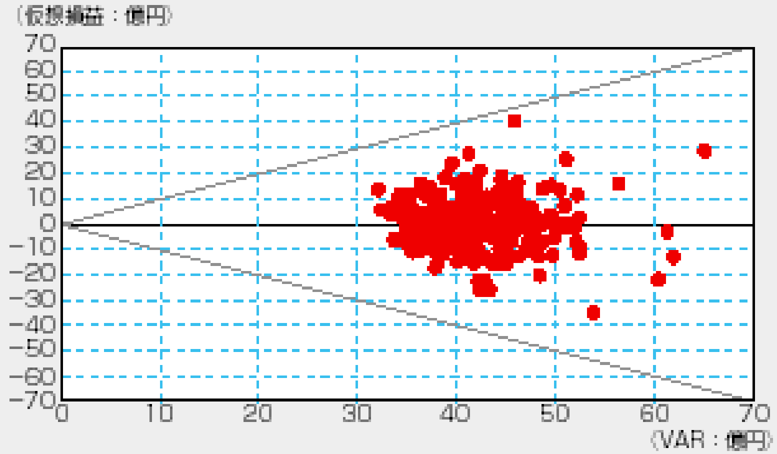
トレーディング業務のリスクカテゴリー別VARの状況

（単位:億円）

	平成17年度				平成18年度				
	年度末日	最大値	最小値	平均	年度末日	最大値	最小値	平均	構成比
合　計	51	55	20	32	39	65	32	43	—
金利リスク	24	27	11	17	15	39	14	23	53%
為替リスク	9	18	3	11	18	40	5	12	28%
株価リスク	30	32	5	14	18	35	7	18	43%
商品リスク	1	17	0	2	3	4	0	2	4%

注）最大値および最小値のカテゴリー別／合計のVARは、それぞれ、別々の日となっています。また、リスクカテゴリー別VARの単純合計は、相互に一部リスクを打ち消しあうため合計とは一致しません。

バックテスト結果



VARによる市場リスク計測の有効性を確認するため、VARと損益を比較するバックテストを定期的に行っています。

トレーディング業務における日々のVARと対応する損益を対比したものですが、期間中に損益がVARを上回った日はなく、内部モデルが十分な精度をもって市場リスクを計測していることを示しています。

ストレステストの結果

平成19年3月末基準(単位:億円)

想定最大損失	
ストレステストによる最大の損失	474

VARは統計的な仮定に基づく市場リスク計測方法であるため、仮定した水準を超えて市場が急激に変動した場合にどの程度の損失を被るかについてのシミュレーションとして、ストレステストを定期的に行っています。

ストレステスト手法としては、過去5年の最大変動を基に損失額を算出する方法、過去の市場イベント時の市場変動を基に損失額を算出する方法等を実施しています。

バンキング業務における市場リスク量（VAR）の年度別推移

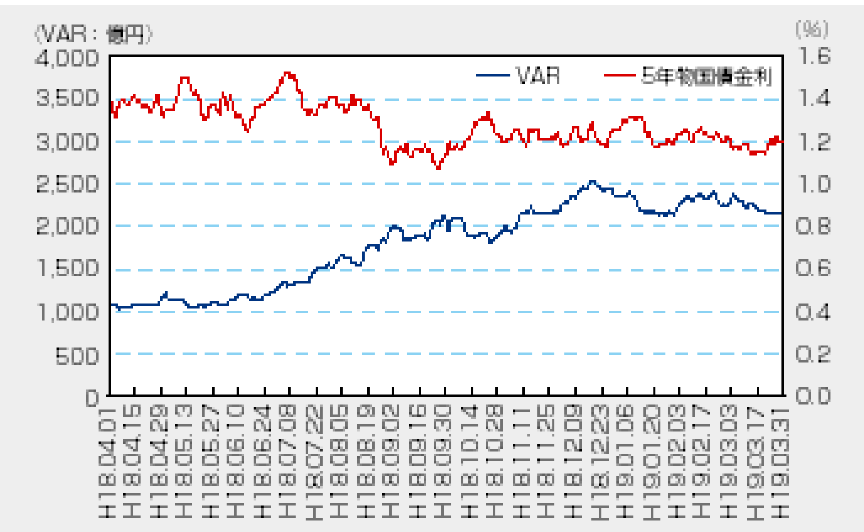
（単位：億円）

	平成16年度	平成17年度	平成18年度	増　減
年度末日	2,034	1,528	2,132	604
最大値	3,015	2,472	2,515	43
最小値	1,861	1,528	1,031	△497
平均値	2,358	2,139	1,794	△345

注）バンキング業務には、政策保有株式を含みません。

バンキング業務のVAR計測手法

線　形リスク：分散・共分散法
非線形リスク：モンテカルロシミュレーション法
VAR　：線形リスクと非線形リスクの単純合算
定量基準　：① 信頼区間　片側99%
② 保有期間　1カ月
③ 観測期間　1年



市場リスクの管理方法としては、主要グループ会社のおのおののリスクプロファイルを勘案し、配賦リスクキャピタルに対応した諸リミット等を設定し、保有する市場リスクが資本勘定等の財務体力を超えないようにリスクを制御しています。

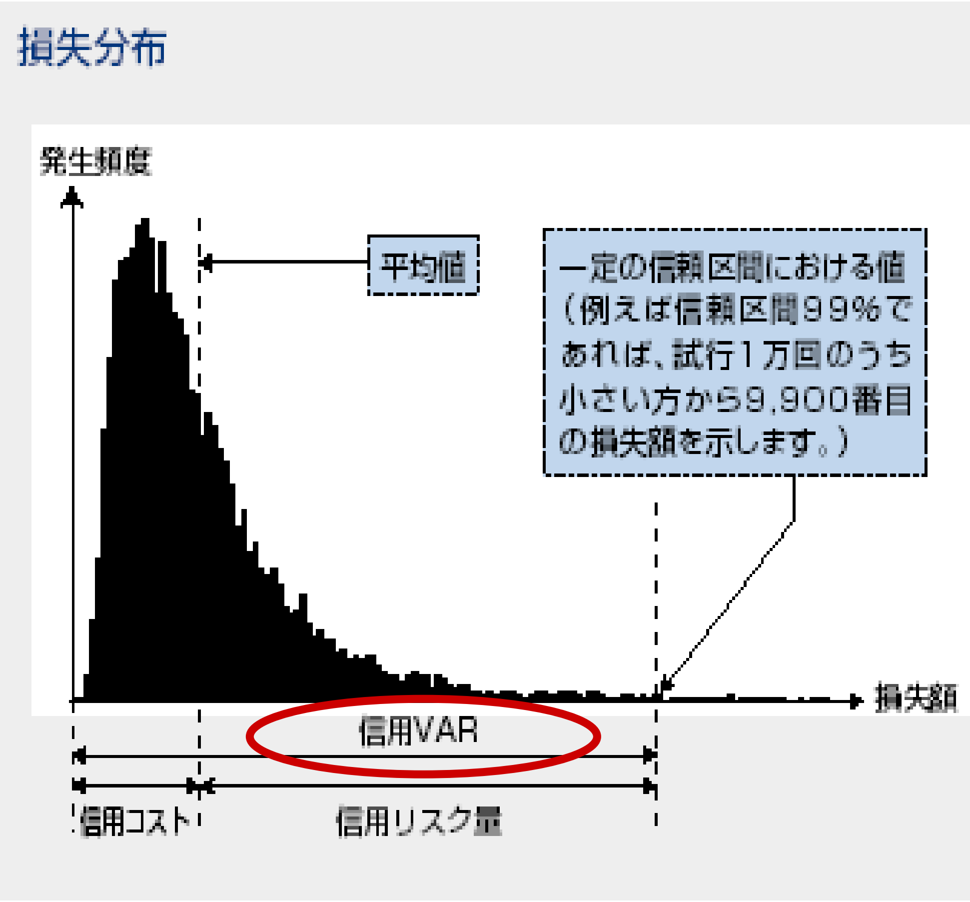
なお、市場リスクの配賦リスクキャピタルの金額は、VARとポジションをクローズするまでに発生する追加的なリスクを対象としています。

トレーディング業務およびバンキング業務については、VARによる限度および損失に対する限度を設定しています。また、バンキング業務等については、必要に応じ、金利感応度等を用いたポジション枠を設定しています。

信用リスクの管理

- 信用VaRについては、メガバンクをはじめ、多くの金融機関が計測するようになっている
  - 信用VaRは、取引先企業の倒産確率と倒産時の損失発生額が分かれば、基本的には計算可能。
- 近年では、金融機関に限らず、一般企業でも、売掛債権等の与信リスクを管理する目的で、信用VaRを活用する動きがみられ始めている。
  - 財務データや各種情報から企業格付を付与し、格付毎の倒産確率を提供する事業者が出てきたのが、一般企業による信用VaRの活用が広がっている背景。

みずほフィナンシャルグループのディスクロージャー誌より



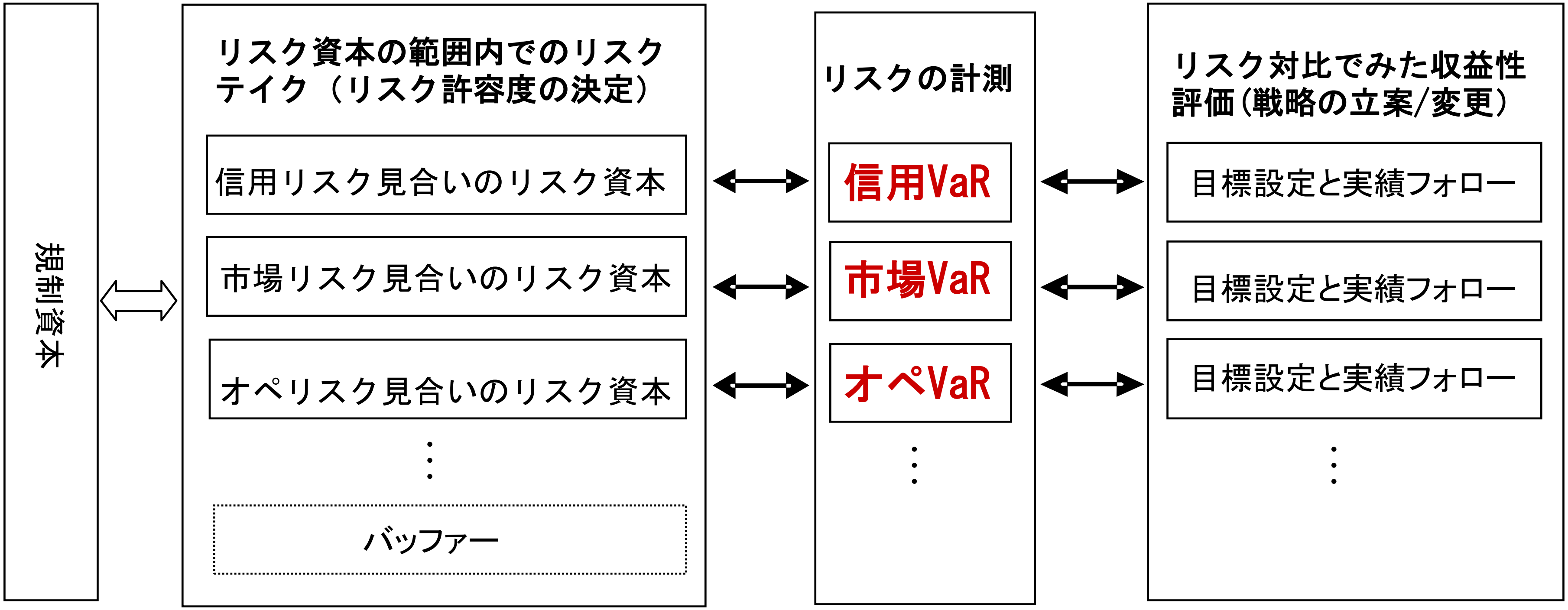
当グループは、統計的な手法によって今後1年間に予想される平均的な損失額（＝信用コスト）、一定の信頼区間における最大損失額（＝信用VAR）、および信用VARと信用コストとの差額（＝信用リスク量）を計測し、ポートフォリオから発生する貸倒損失の可能性を管理しています。

与信取引における取引指針を設定する際には、信用コストを参考値として活用する等により、リスクに見合った適正なリターンを確保する運営を行っています。

また、信用VARは、それが実際に損失として顕在化した場合、自己資本および引当金の範囲内に収まるように、クレジットポートフォリオの内容をさまざまな観点からモニタリングし、必要に応じてポートフォリオに制約を設定しています。

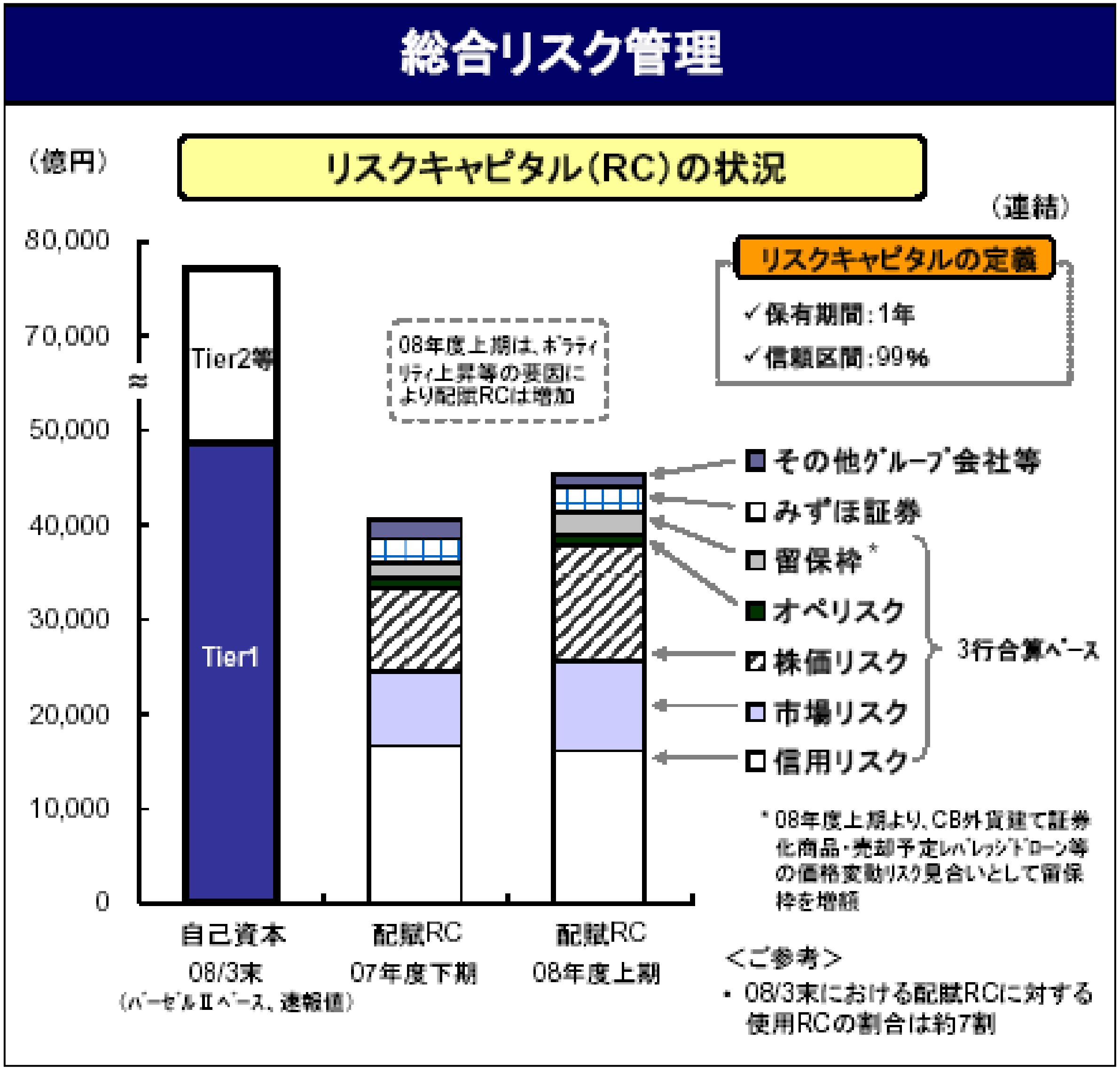
統合リスク管理

統合リスク管理とは、VaR 等の統一的な尺度で各種リスクを計測し、統合（合算）して、金融機関の経営体力（収益・自己資本）と対比することによって管理する手法をいう。

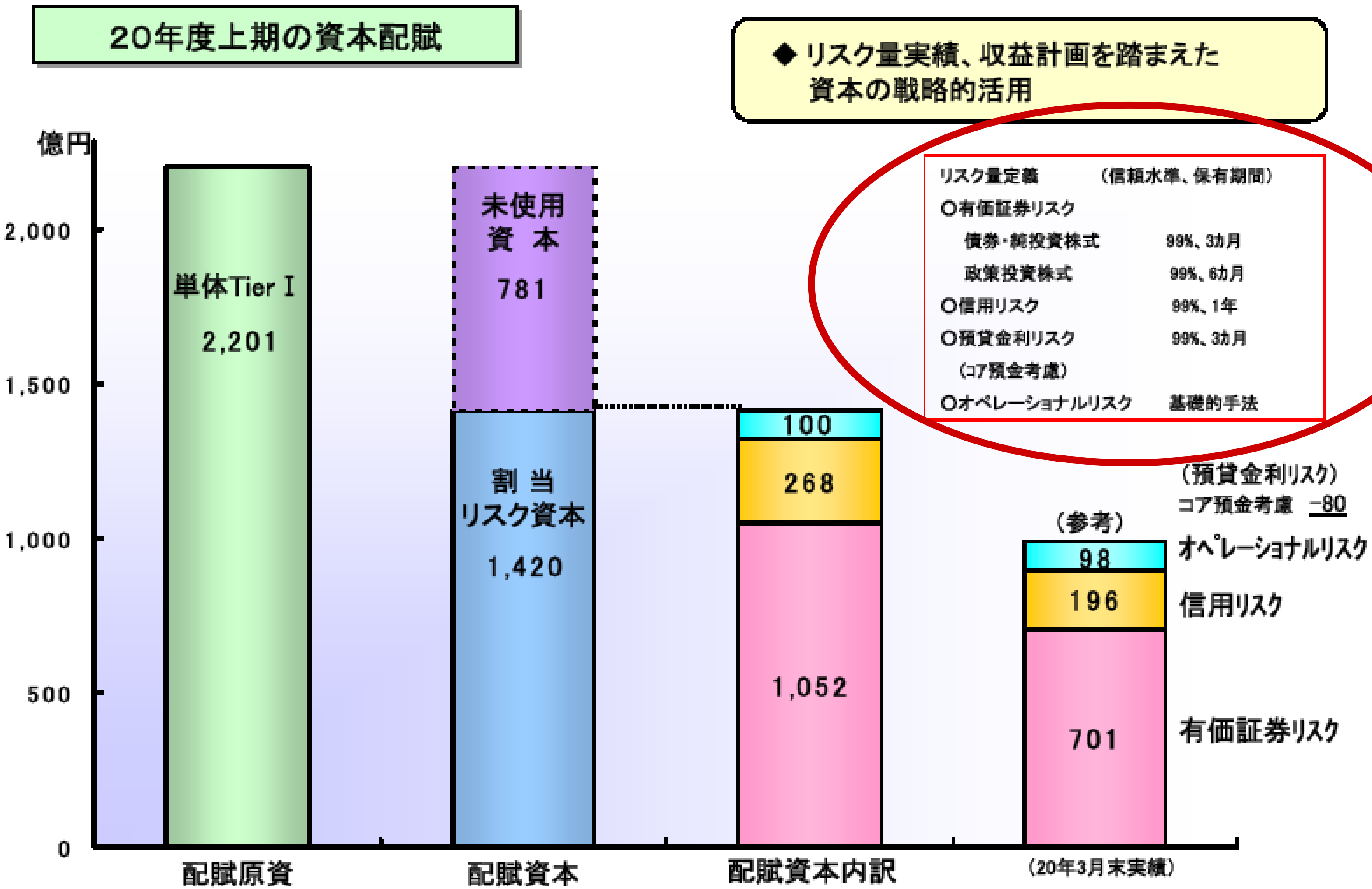


（注）リスク資本は、規制資本の水準を考慮し、リスク・テイクをコントロールするために定める内部管理上の概念。

みずほフィナンシャルグループのIR説明会資料より



山陰合同銀行の会社説明会資料より



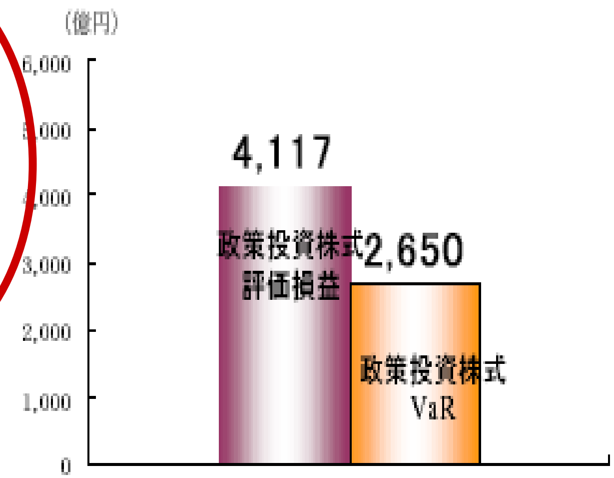
京都銀行の会社説明会資料より

統合リスク量の状況(20年3月末)

政策投資株式修正VaRは評価損益の範囲内
(政策投資株式修正VaR＝政策投資株式VaR－評価損益)

	資本配賦額	リスク量	
市場リスク(除く政策投資株式)VaR	700	281	保有期間 1ヵ月 信頼係数 99%
政策投資株式修正VaR	0	0	保有期間 6ヵ月 信頼係数 99%
事業性の信用リスク量(UL:予想損失変動額)	300	229	保有期間 1年 信頼区間 99%
住宅ローンの信用リスク量(UL:予想損失変動額)	100	52	保有期間 1年 信頼区間 99%
オペレーショナル・リスク量	140	140	基礎的手法
統合リスク量	1, 240	702	

政策投資株式の価格変動リスク



伊予銀行のIR決算説明会資料より

統合リスク管理方法変更（リスク管理高度化のための市場リスク管理システム稼働）

○ 自己資本の状況、リスク特性、戦略等を考慮しリスクリミット設定

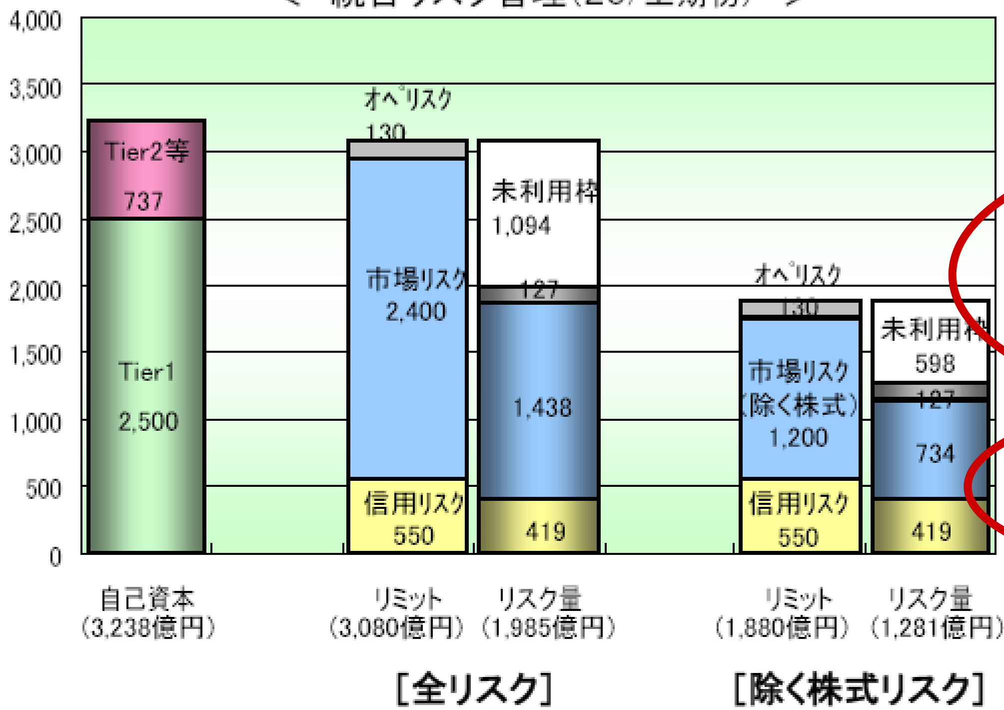
○ 株式を含む全体のリスクリミット設定においては株式評価益を考慮するが、「株式リスクを除くリスク量」がTier1の範囲に収まるようにリスク運営を実施

リスク管理の高度化によってリスクテイク能力向上を図る

○ 貸出の増強（地域でのシェアアップ、船舶貸出増強等）に余裕資本を活用

○ 有価証券ポートフォリオのリスク・リターンを最適化するためのリスクテイク（コモデティ、エマージング等）

＜ 統合リスク管理（20/上期初） ＞



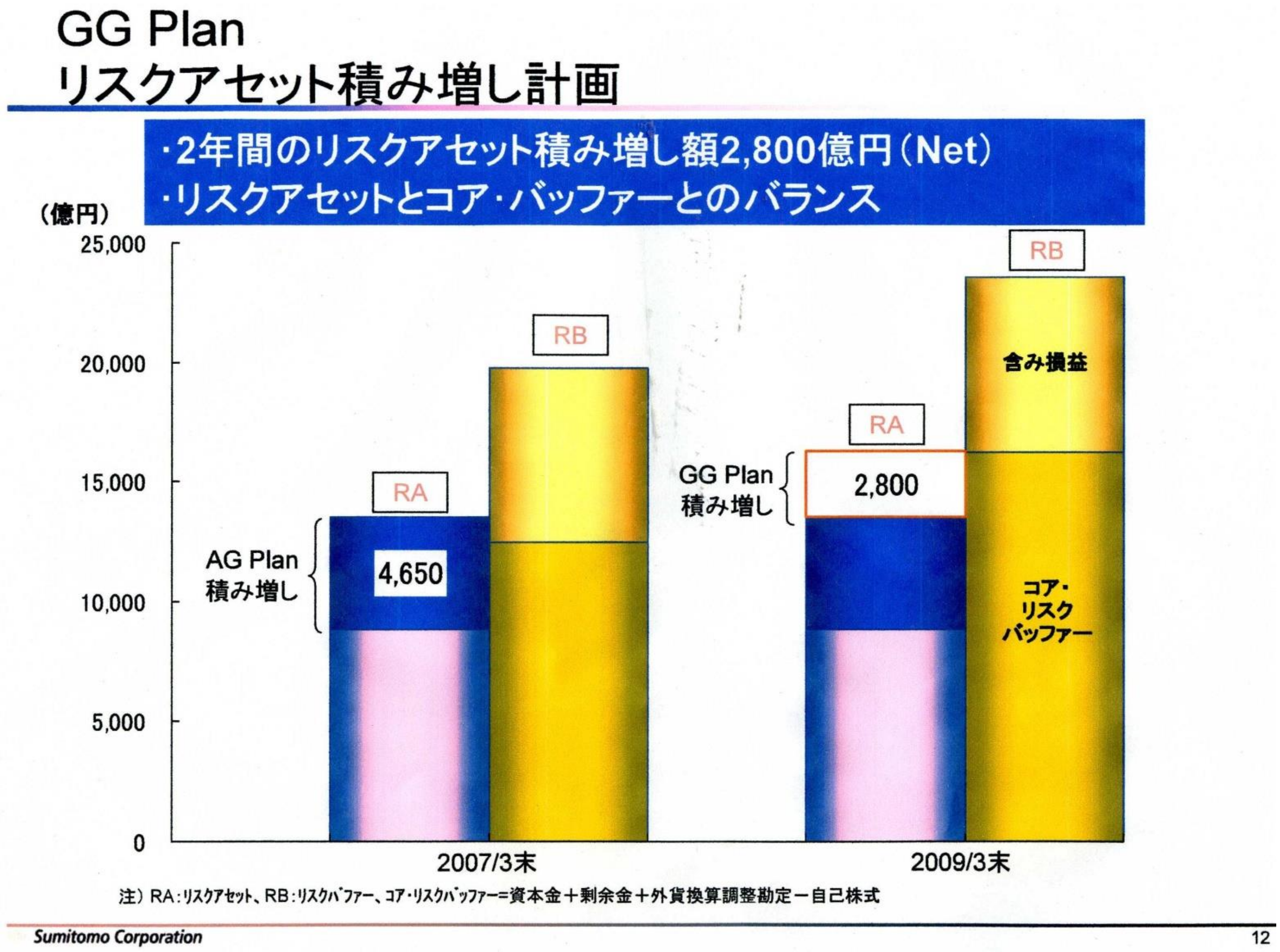
○オペレーショナルリスク
・バーゼルⅡ基礎的手法により算出

○市場リスク（保有期間1年，99.9%）
・異なるリスク間の相関考慮
・コア預金･･･流動性預金の50%
・株式VaR･･･政策株式を含む
（評価損益ネッティング方式から変更）

○信用リスク（保有期間1年，99.9%）
・事業性貸出等･･･モンテカルロ法
・個人ローン･･･解析的手法

住友商事㈱の中期経営計画（公表資料）より

RA： リスクアセット（＝最大損失可能額）
RB： リスクバッファー（＝資本金・剰余金等－自己株式）



経営資源の配分への活用

◆ リスクに見合ったリターンを確保しているか、という観点から、様々なリスク調整後収益指標を計測することにより、採算の低い業務・部門を縮小・廃止して、採算の高い業務・部門に経営資源を集中する際に活用する。

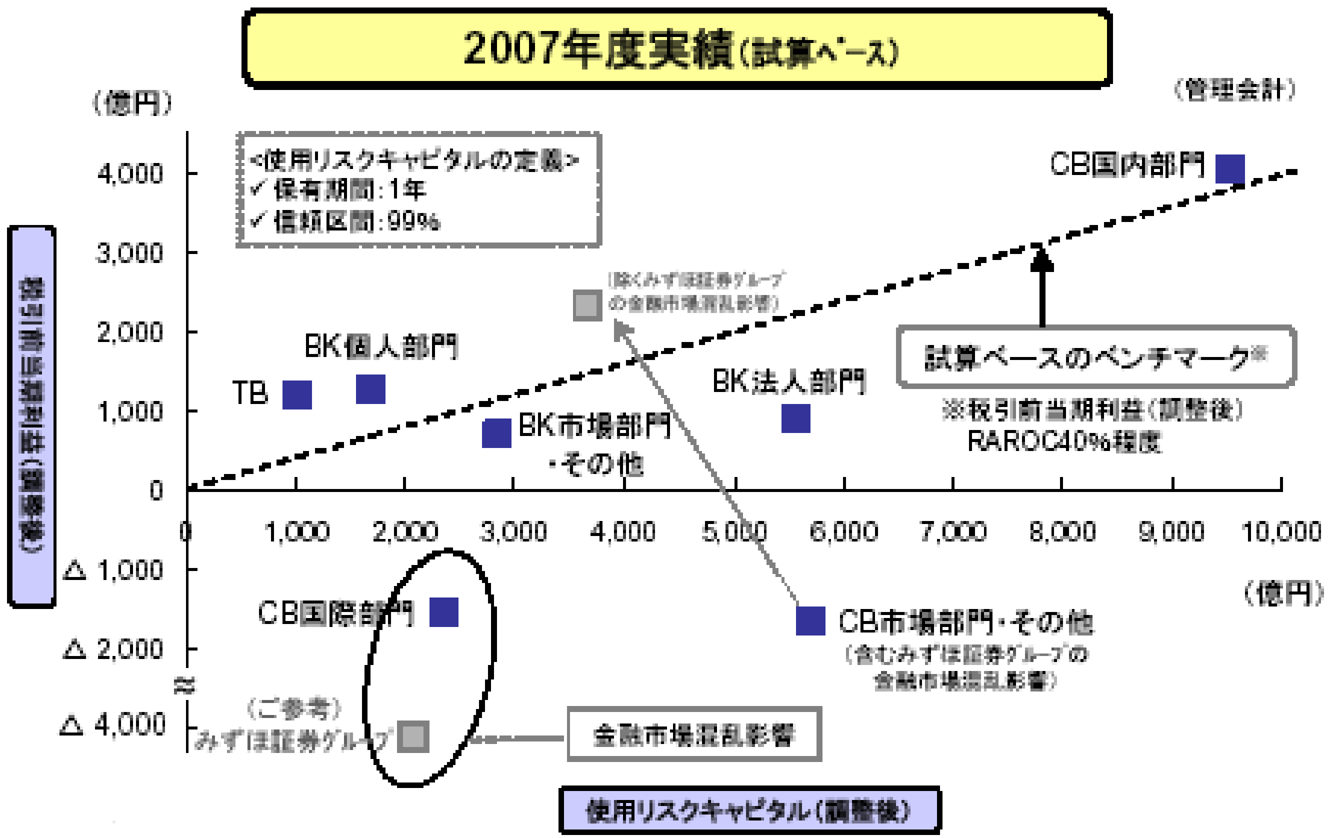
【リスク調整後収益指標】

- リスク調整後収益
  ＝ 収益 － 予想損失（EL）
- RAROC：Risk Adjusted Return On Capital
  ＝ リスク調整後収益／リスク資本（UL）
- SVA： Shareholders Value Added
  ＝ リスク調整後収益 － リスク資本（UL）×資本コスト率

みずほフィナンシャルグループのIR説明会（2007年度）資料より

部門別RAROC

■ 持株会社における経営管理の指標として、「税引前当期利益（調整後）RAROC」により、リスク・リターンを検証



住友商事㈱の中期経営計画（公表資料）より

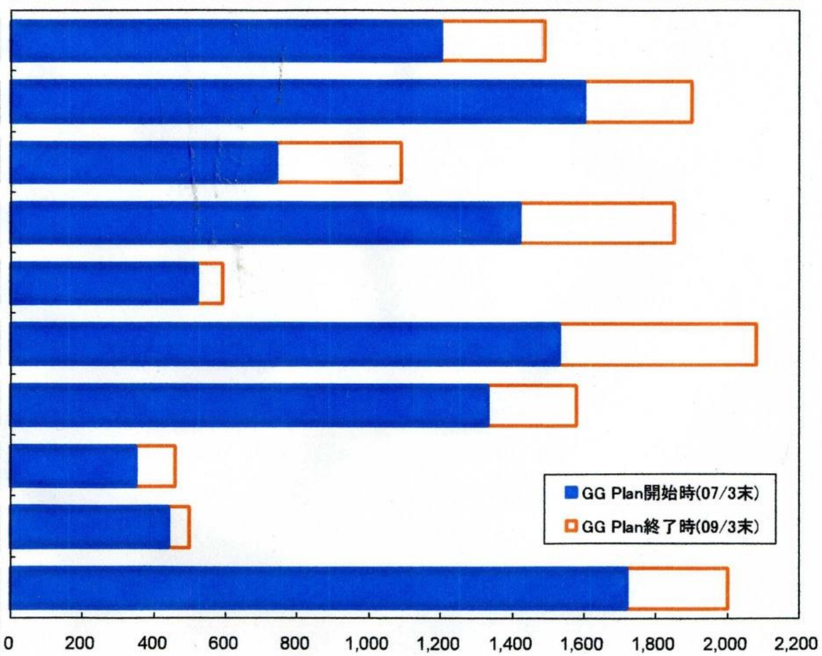
リスク・リターン：RA（最大損失可能額）に対する当期純利益

GG Plan
セグメント別リスクアセット／リスク・リターンの計画

AG:AG Plan(FY05-06) GG:GG Plan(FY07-08)	リスク・リターン （%） AG(実績)	 GG(計画)
金属	22.4	19.8
輸送機・建機	16.8	17.7
インフラ（旧機電）	16.3	21.3
メディア・ライフスタイル	11.5	11.6
化学品・エレクトロニクス	16.3	21.3
資源・エネルギー	21.9	18.0
生活産業・建設不動産	11.0	13.7
金融・物流	20.8	17.4
国内ブロック・支社	12.1	18.3
海外現地法人・海外支店	25.0	23.1
全社計	15.8	15.6

注）リスク・リターンは2年平均

リスクアセット残高（億円）



滋賀銀行の経営管理資料(セミナー資料として公開)

部門別RAROC(経営向け)

SVA = RACAR ×(1－40.43%)－ EC×5% SVA : Shareholders' Value Added(株主付加価値)

SVA ＞ 0	目標ROE(5%)を達成し、 さらに株主価値を高めた金額

(単位:百万円)

	業粗 a	信用コスト b	RAR c=a-b	経費 d	RACAR e=c-d	EC f	RAROC e/f	SVA ＊
合計								
営業部門計								
エリア ①								
エリア ②								
エリア ③								
エリア ④								
エリア ⑤								
エリア ⑥								
エリア ⑦								
エリア ⑧								
エリア ⑨								
エリア ⑩								
エリア ⑪								
エリア ⑫								
エリア ⑬								
エリア ⑭								
ALM部門								

信用度別ポートフォリオ(営業店向け)

(単位:百万円)

	貸出残高	レート	利鞘率	資金利益	EL 信用コスト	UL 所要資本	リスクウェイト	信用コスト 控除後利益	リスクアセット	RAROA	RAROC
合 計											
個別管理先											
うち事業法人											
b1											
b2											
b3											
b4											
b5											
b6											
b7											
c1											
c2											
プール管理先											

統計･確率の基礎知識

　リスク計量化の前提となる統計･確率の基礎知識について整理、復習します。

　図解中心の説明ですので、統計･確率は苦手だと感じている方も理解度アップに繋がります。

VaRを理解するために必要な知識の確認

（統計量）	（確率分布）	（統計理論）
平均	正規分布	推定
分散	２項分布	検定
標準偏差	i.i.d	
99%点		
相関係数		
共分散		

目　次

1. 基本統計量（1変量）

（1） 平　　均

（2） 分　　散

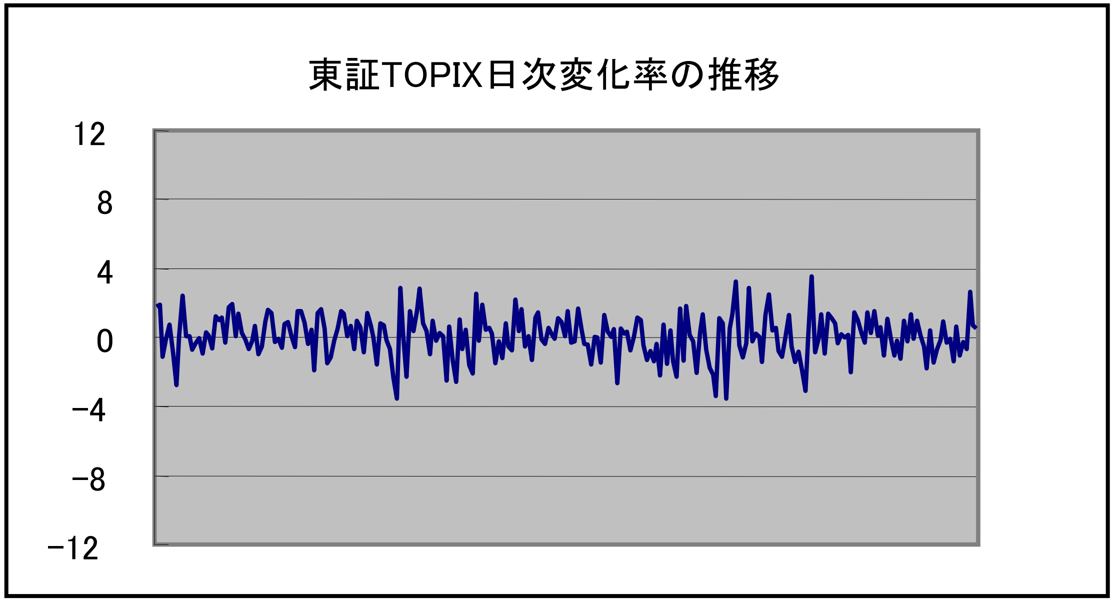
（3） 標準偏差

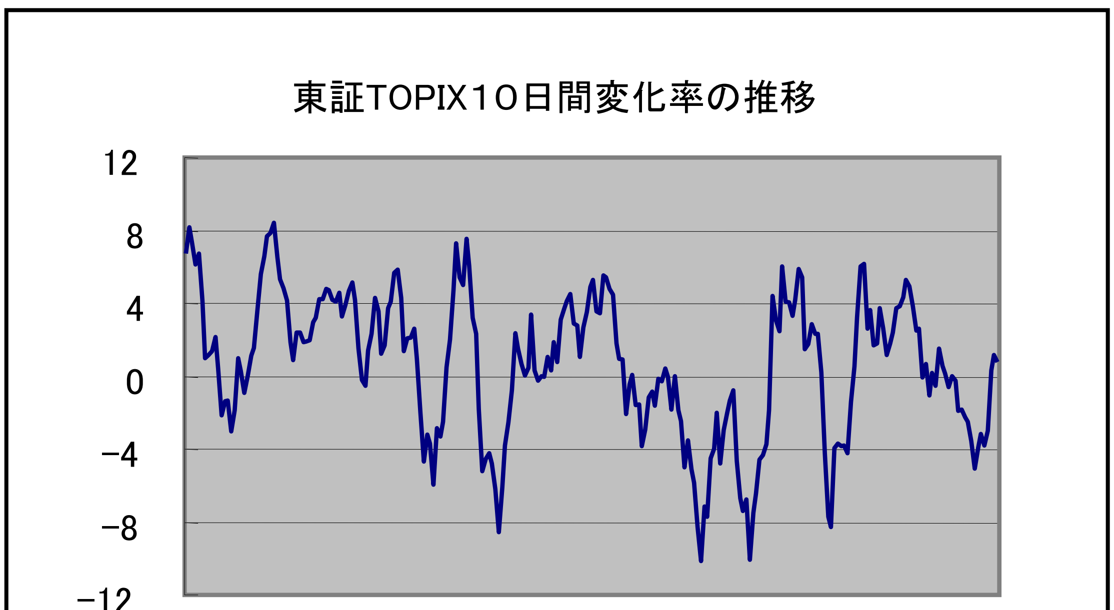
（4） パーセント点

講義の中では、以下の観測データを使います。

（例）　東証TOPIX・日次変化率　　250個
　　　　東証TOPIX・10日間変化率　250個

	日次変化率	10日間変化率
200X/9/29	0.508	0.785
200X/9/28	0.722	1.194
200X/9/27	2.651	0.319
200X/9/26	−0.667	−2.994
200X/9/25	−0.245	−3.783
200X/9/22	−1.048	−3.139
200X/9/21	0.629	−3.894
200X/9/20	−1.379	−5.040
200X/9/19	−0.091	−3.538
200X/9/15	−0.295	−2.474
200X/9/14	2.651	0.319
⋮	⋮	⋮


東証TOPIX日次変化率の推移
12
8
4
0
−4
−8
−12


東証TOPIX１０日間変化率の推移
12
8
4
0
−4
−8
−12

基本統計量	Excel関数	日次変化率	10日間 変化率
データ数	COUNT	250	250
平均	AVERAGE	0.063	0.656
分散	VARA	1.540	14.966
標準偏差	STDEVA	1.241	3.869

（設問）

グラフと基本統計量をみて、どんなことに気付きましたか？

（ヒント）

気付いて欲しいことは4つあります。

答えは、講義の中で・・・

（1）平　均

- 平均は、観測データセットの「中心の位置」を示す指標の1つ。

$$\overline{X} = \frac{\text{データの和}}{\text{データの数}}$$

$$= \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}{N}$$

- Excelでは、関数AVERAGE（データ範囲）を使って求める。

（2- ｉ ）分散(記述統計の立場で定義)

- 分散は、観測データセットの「バラツキ」を示す指標の1つ。
  - データの「偏差平方和」(平均との差を2乗して合計)を求めて**「データの数」**で割る。
  - 分散の「単位」は、データの持つ「単位」の2乗。

$$Vp = \sigma^2 = \frac{\text{データの偏差平方和}}{\textbf{データの数}}$$

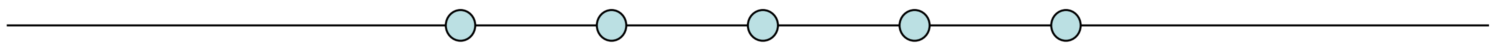
$$= \frac{(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + \cdots + (X_N - \overline{X})^2}{N}$$

- Excelでは、関数VARP(データ範囲)を使って求める。

記述統計：　中学・高校で学習する平均と分散

（例）　　　　　　　　**<u>平均</u>**：中心の位置

観測データ　　３　　４　　５　　６　　７



偏差（平均との差）　－２　－１　０　１　２　　合計すると　ゼロ

偏差平方　$(-2)^2$　$(-1)^2$　0^2　1^2　2^2　　合計すると

偏差平方和　１０

- 観測データがバラつく（平均から離れる）と偏差平方和は増える。
- しかし、観測データ数が増えても偏差平方和は増えてしまう。

$$\textbf{分散} = \frac{\text{偏差平方和　10}}{\text{観測データ数　5}}$$

（参考）記述統計の考え方

- 観測データを母集団全体と考えて、統計量の算定を行い、観測データが持つ特性を分析・記述する。

（例）ある特定の集団（Ｎ人）の身長の平均と分散を計算する。

平均

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}{N}$$

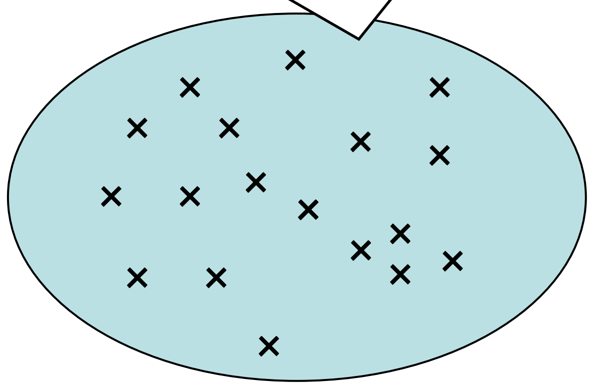
分散

$$Vp = \frac{(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + \cdots + (X_N - \overline{X})^2}{N}$$

母集団＝標本の特性値を調べる

平均 μ
分散 V
標準偏差 σ
VaR　など.

計測可能



母集団＝標本

（2- ⅱ ）分散（推測統計の立場で定義）

- 分散は、観測データセットの「バラツキ」を示す指標の1つ。
  - データの「偏差平方和」（平均との差を2乗して合計）を求めて**「データの数－1」**で割る。
  - 分散の「単位」は、データの持つ「単位」の2乗。

$$Va=\sigma^2 = \frac{\text{データの偏差平方和}}{\text{データ数}-1}$$

$$= \frac{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\cdots+(X_N-\overline{X})^2}{N-1}$$

- Excelでは、関数VARA（データ範囲）を使って求める。

（参考）推測統計の考え方

- <u>観測データを、母集団から抽出した標本（サンプル）と考えて、</u>統計量の算定を行い、母集団の特性を推測し、検証する。

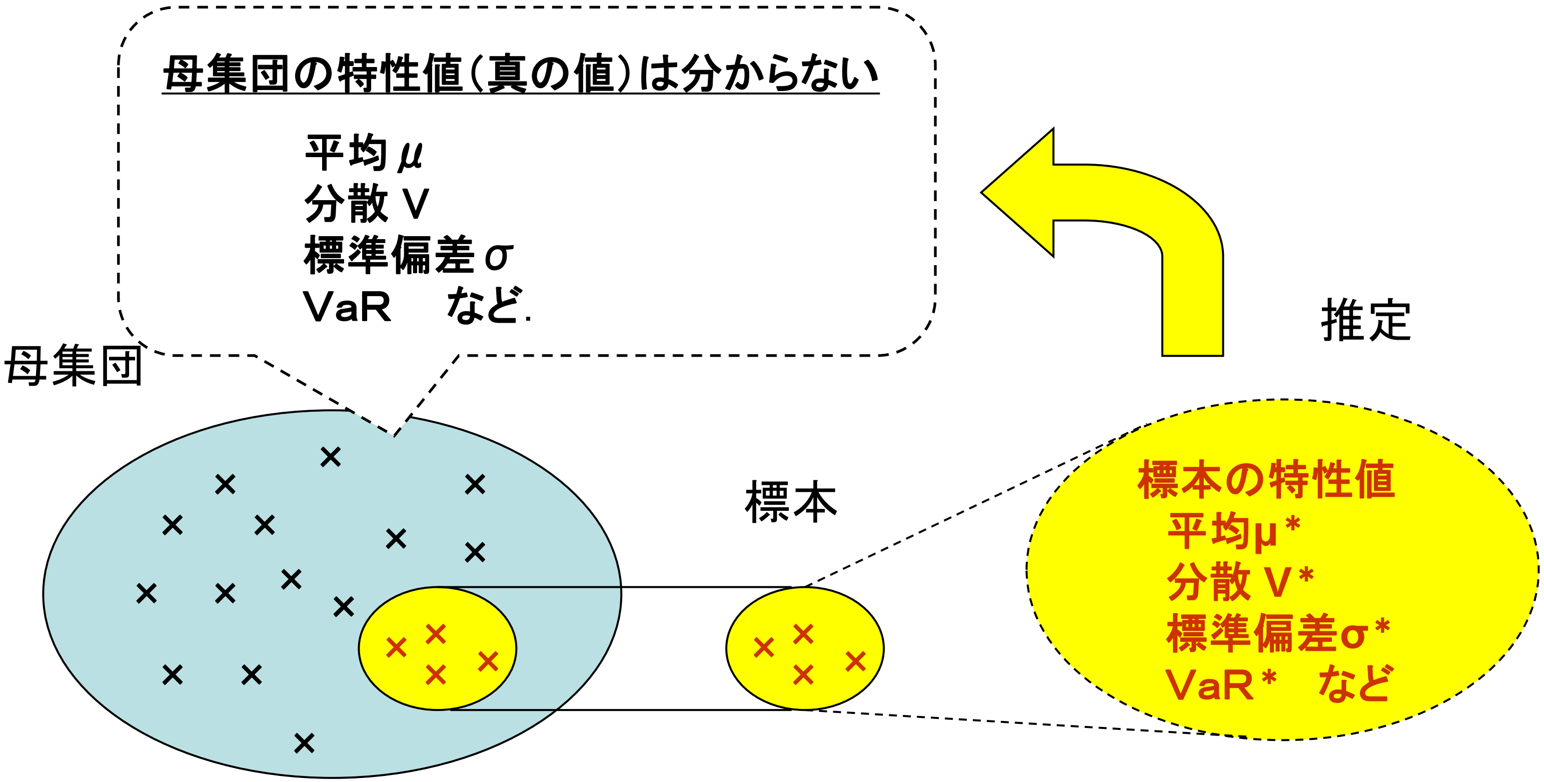
（例）任意に抽出したN人（標本）の身長を計測して、日本人全体（母集団）の身長の平均と分散を推定する。

平均

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}{N}$$

分散（不偏標本分散）

$$Va = \frac{(X_1 - \overline{X})^2 + (X_2 - \overline{X})^2 + \cdots + (X_N - \overline{X})^2}{N-1}$$


母集団の特性値（真の値）は分からない
平均μ
分散Ｖ
標準偏差σ
VaR　など.
母集団
推定
標本
標本の特性値
平均μ*
分散Ｖ*
標準偏差σ*
VaR*　など

Ｎ－１で割った「標本分散」の特徴

・ 母集団の「真の分散」を、統計的手法で「推定」するときにN−1で割った「標本分散」を使うのは、以下のような特徴があるため。

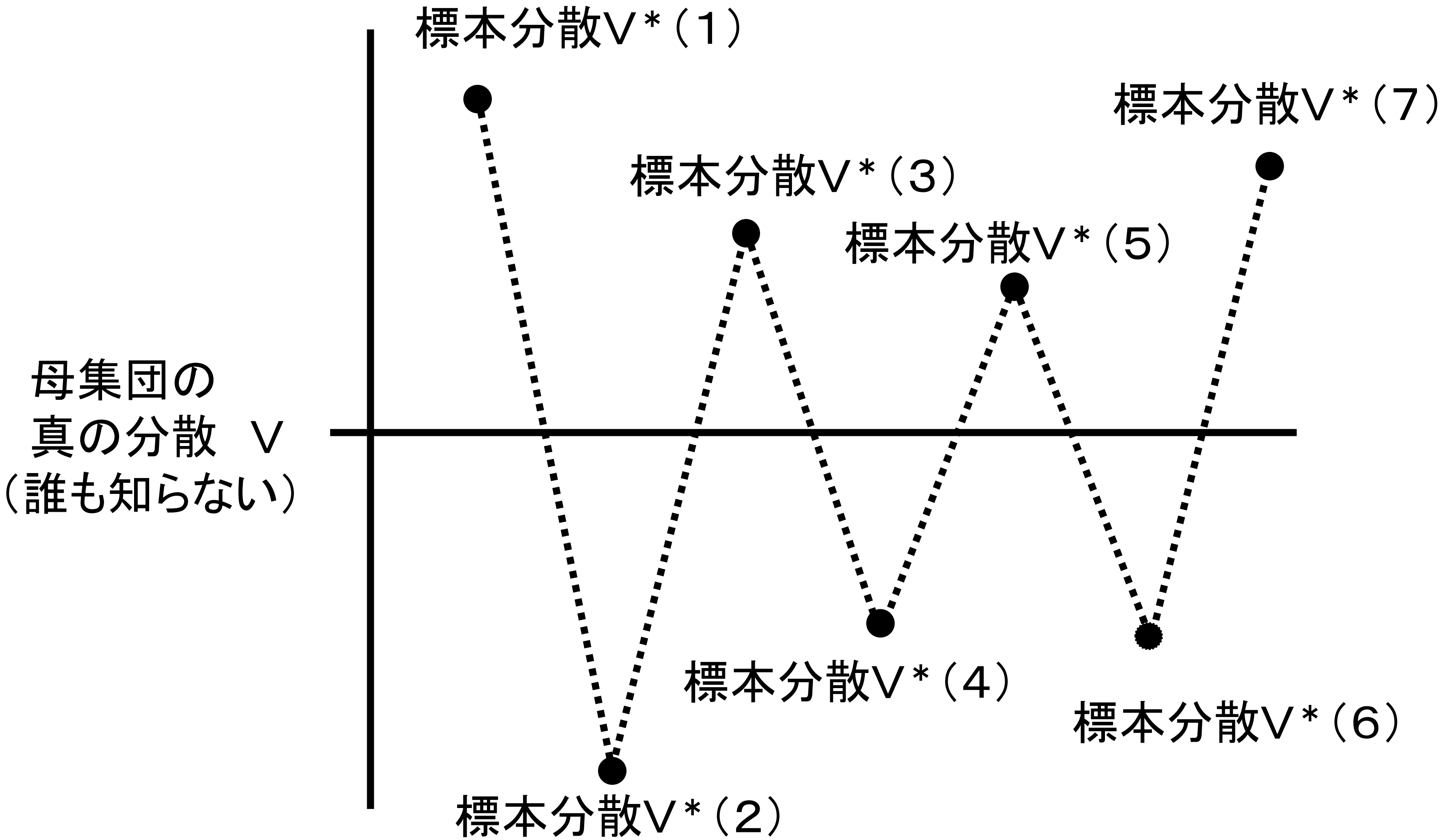
（一致性）

・「標本分散」は、Nが大きくなると、母集団の「真の分散」に限りなく近づく

（不偏性）

・「標本分散」は、母集団の「真の分散」の偏りのない推定値となることが知られている

標本分散（V＊）を、標本を変えて繰り返し計算すると、
真の分散を中心にして偏りなく分布する（不偏性）



講義の中で、VaRを計測する際に使う分散、標準偏差は、推測統計の立場から定義したもの（N－1 で割ったもの）です。

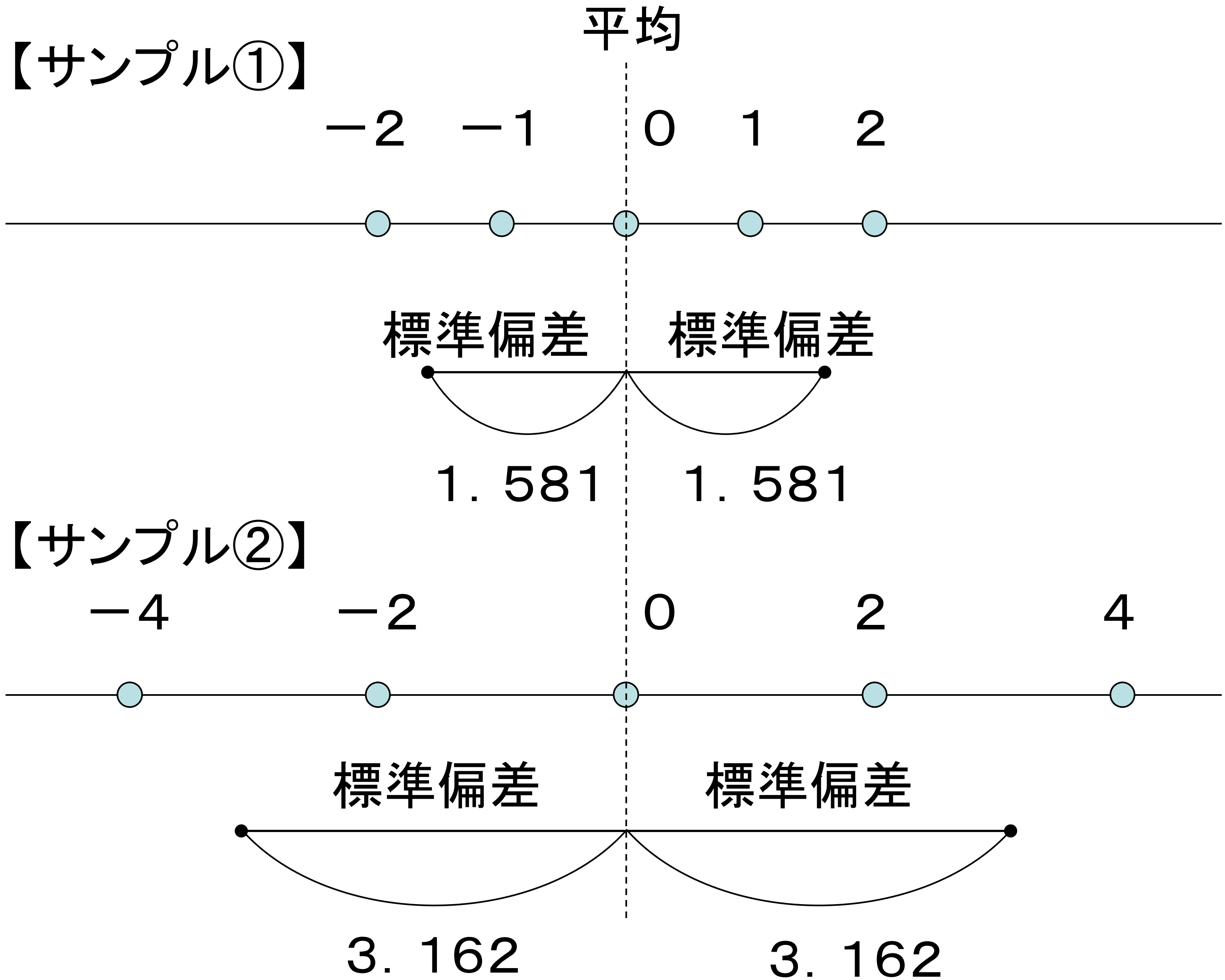
（３） 標準偏差（推測統計の立場で記載）

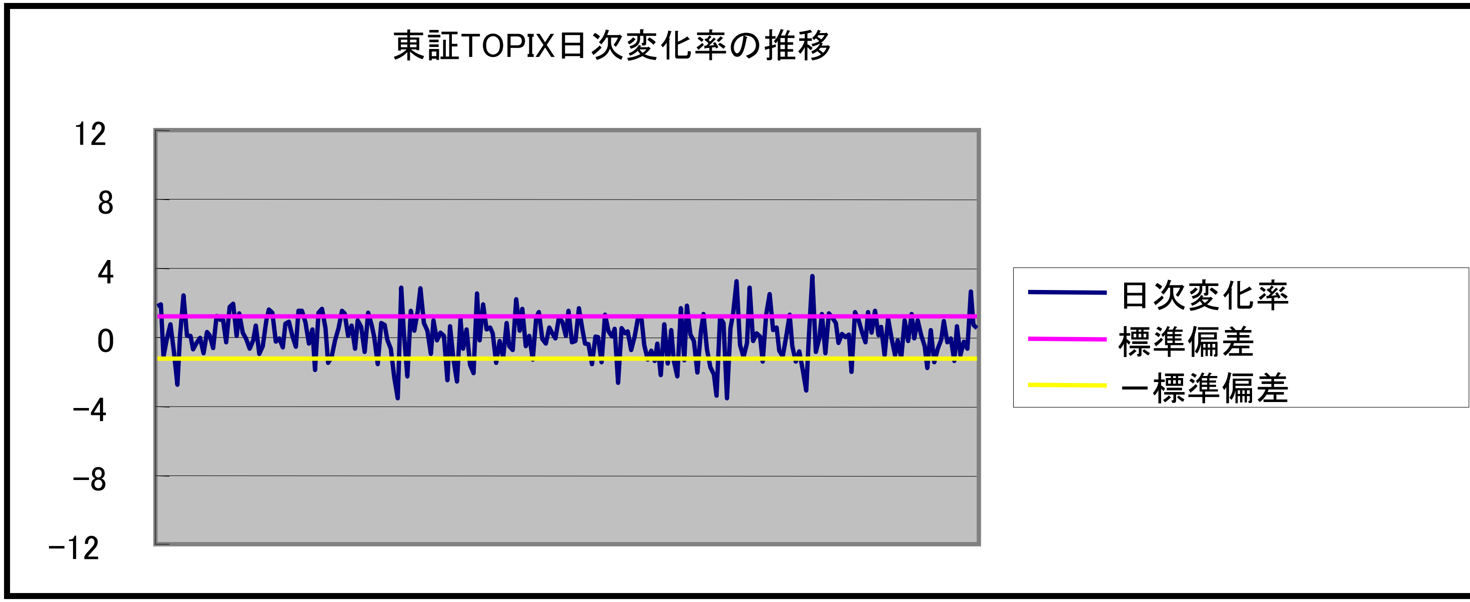
- 標準偏差は、観測データセットの「バラツキ」を示す指標の１つ。分散の平方根（ルート）をとって定義する。
  - － 標準偏差の「単位」は、データの持つ「単位」と同じ。

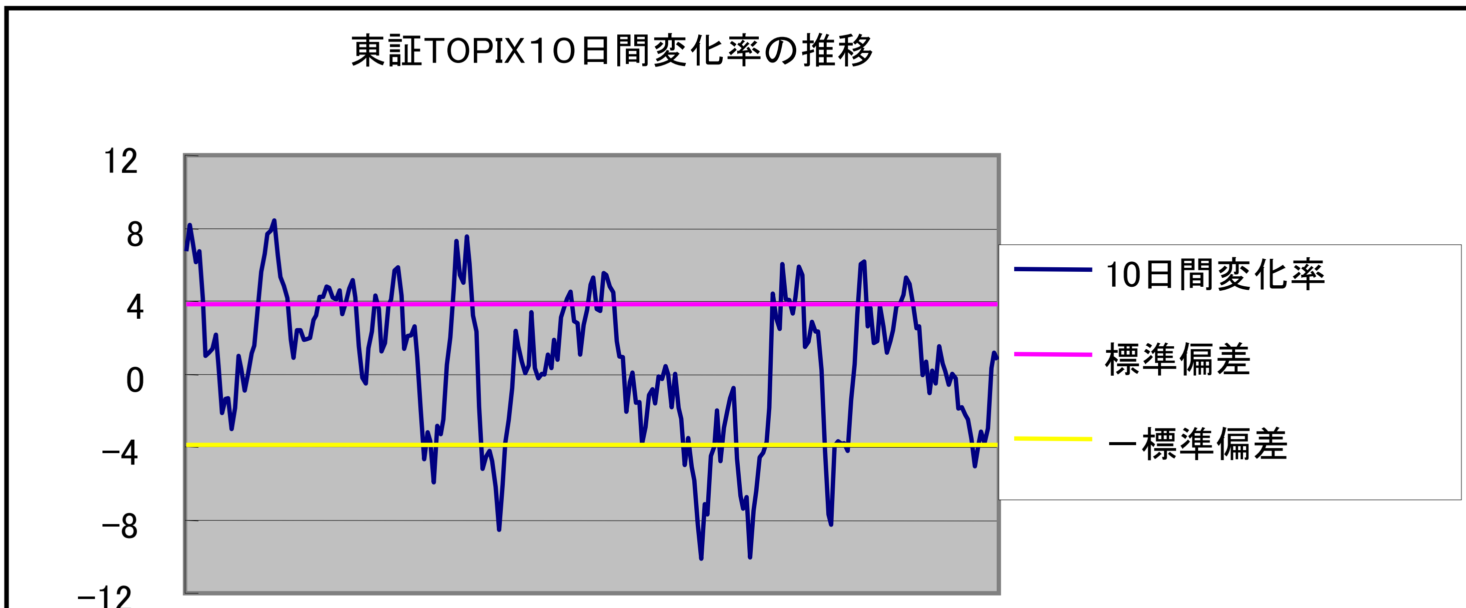
$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{データの偏差平方和}}{\text{データ数－１}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(X_1-\overline{X})^2+(X_2-\overline{X})^2+\cdots+(X_N-\overline{X})^2}{N-1}}$$

- Excelでは、関数STDEVA（データ範囲）を使って求める。


平均
【サンプル①】
－2　－1　0　1　2
標準偏差　標準偏差
1．581　1．581
【サンプル②】
－4　－2　0　2　4
標準偏差　標準偏差
3．162　3．162


東証TOPIX日次変化率の推移
12
8
4
0
−4
−8
−12
日次変化率
標準偏差
−標準偏差


東証TOPIX１０日間変化率の推移
12
8
4
0
−4
−8
−12
10日間変化率
標準偏差
−標準偏差

基本統計量	Excel関数	日次変化率	10日間変化率
データ数	COUNT	250	250
平均	AVERAGE	0.063	0.656
分散	VARA	1.540	14.966
標準偏差	STDEVA	1.241	3.869

- 平均をみると、日次変化率、10日間変化率とも概ねゼロとなっている。
- 分散をみると、10日間変化率の分散は、日次変化率の分散の概ね10倍となっている。
- 標準偏差をみると、10日間変化率の標準偏差は、日次変化率の標準偏差の概ね$\sqrt{10}$倍（＝3.162倍）となっている。

株価･金利･為替等の変化率に関して

① その平均をゼロと仮定したり、

② T日間変化率の標準偏差は、日次変化率の標準偏差の√T倍と仮定して

市場VaRを計測することがある。

（４）パーセント点

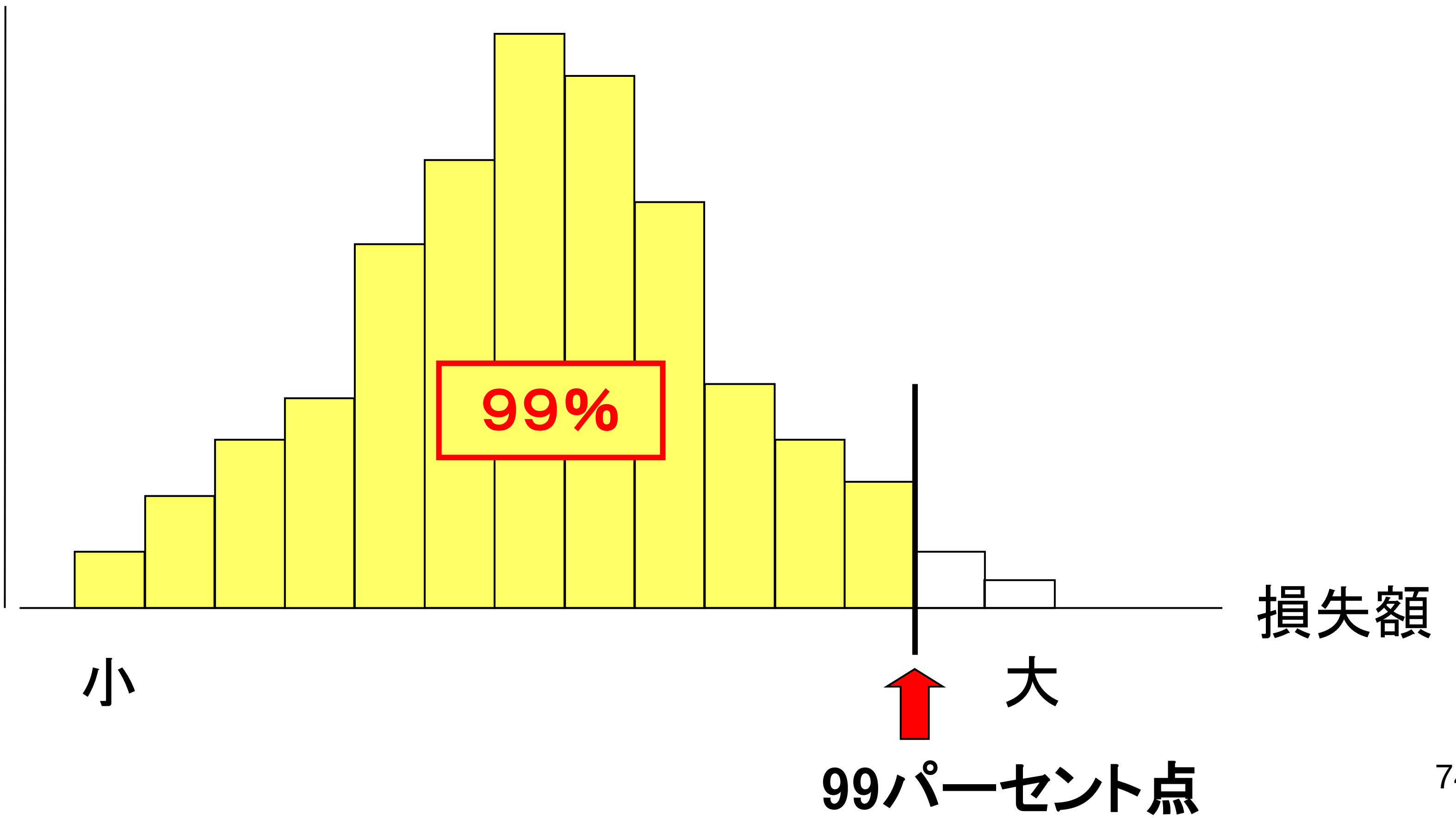
- パーセント点とは、観測データを小さい順に並べたときに、その値よりも小さな値の割合が指定された割合（百分率） になるデータの値として定義される。
- 例えば、９９パーセント点というのは、その値より小さなデータの割合が９９％となるデータの値のことを指す。
  - ５０パーセント点のことを中央値（メジアン）と呼ぶ。
  - ２５パーセント点を第１四分位点、７５パーセント点を第３四分位点と呼ぶ。
- Excelでは、関数PERCENTILE（データ範囲,率）を使って求める。

（例） 1000個の損失データが観測されている場合、
99％点というのは、損失額を小さい順に並べて
990番目になるデータ値のこと。

順位	百分位	損失額
985 番目	98.5%	529
986 番目	98.6%	558
987 番目	98.7%	589
988 番目	98.8%	618
989 番目	98.9%	621
990 番目	99.0%	632
991 番目	99.1%	654
992 番目	99.2%	671
993 番目	99.3%	698
994 番目	99.4%	703
995 番目	99.5%	712
996 番目	99.6%	776
997 番目	99.7%	794
998 番目	99.8%	810
999 番目	99.9%	831
1000 番目	100.0%	869

99%点

99%VaRは、文字通り、99パーセント点のことです。



２．基本統計量（２変量）

（１）散布図

（２）共分散

（３）相関係数

（４）相関行列

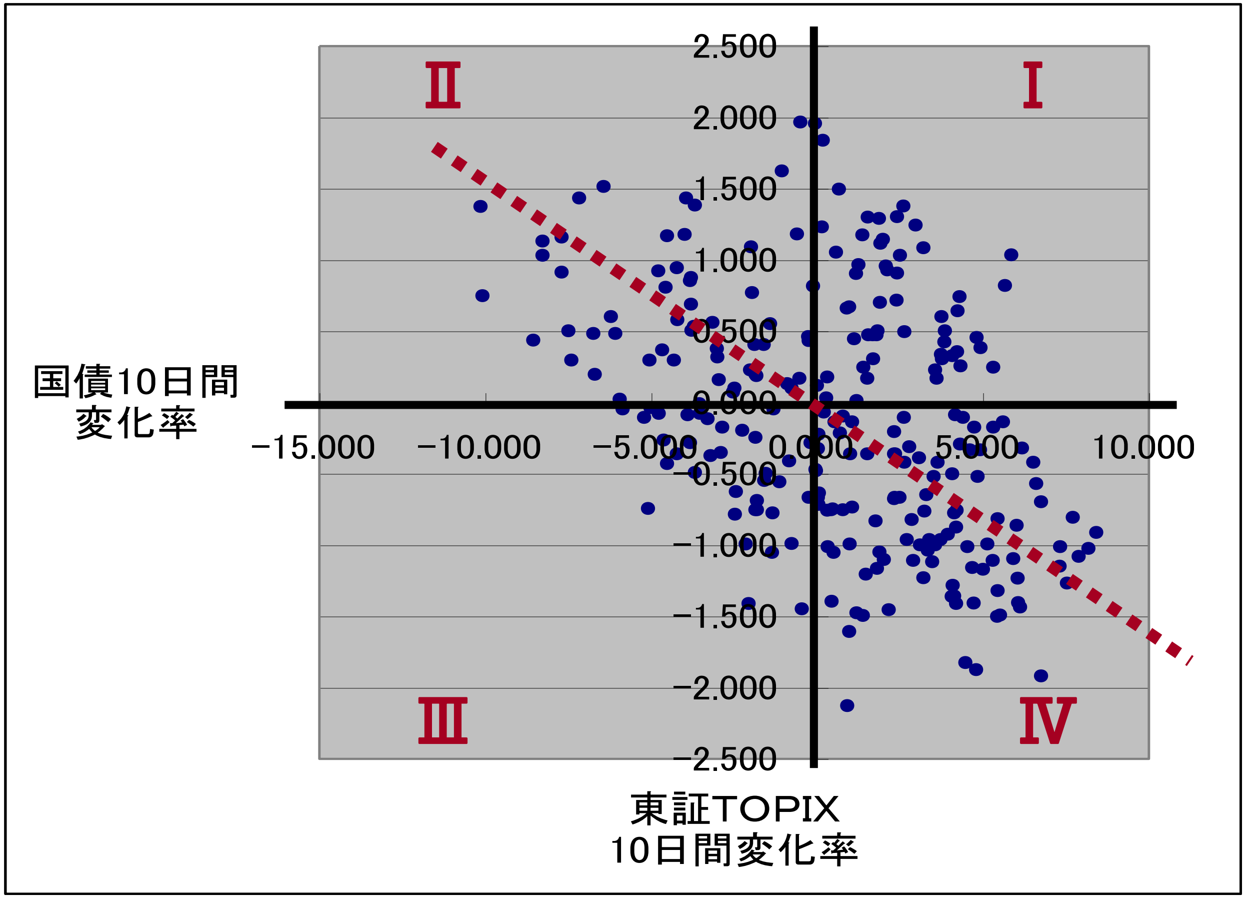
（1） 散布図

- 以下のような２変量の関係を調べるためには、散布図を書くのが直感的に理解しやすい。

	東証TOPIX 10日間変化率 (X)	10年割引国債 10日間変化率 (Y)
200X/9/29	0.785	−0.098
200X/9/28	1.194	0.010
200X/9/27	0.319	0.177
200X/9/26	−2.994	0.315
200X/9/25	−3.783	0.688
200X/9/22	−3.139	0.560
200X/9/21	−3.894	−0.088
200X/9/20	−5.040	0.295
200X/9/19	−3.538	−0.010
200X/9/15	−2.474	0.098
⋮	⋮	⋮

株価変化率と国債価格変化率との関係

- Ⅱ、Ⅳのエリアに分布が多い。
- 株価変化率がプラス（マイナス）のとき、国債価格変化率はマイナス（プラス）となる傾向がある。



（2）共分散（推測統計の立場で記載）

- 共分散は、2つの変量（X、Y）の間の「直線的な比例関係の強さ」を示す指標。
  - データの「偏差積和」を求めて、**「データ数－1」**で割る。
  - 共分散の「単位」は、Xの持つ「単位」 掛ける Yの持つ「単位」。

$$\mathrm{COV}(X, Y) = \frac{\text{データの偏差積和}}{\text{データ数}-1}$$

$$= \frac{(X_1-\overline{X})(Y_1-\overline{Y})+(X_2-\overline{X})(Y_2-\overline{Y})+\cdots+(X_N-\overline{X})(Y_N-\overline{Y})}{N-1}$$

- Excelでは、関数COVAR（データ範囲（X）、データ範囲（Y））を使って求める。

（注）Excelでは、データの偏差積和をN－1ではなく、Nで割って共分散を定義している（記述統計の立場で定義している）ため、別途、調整を行う必要がある。

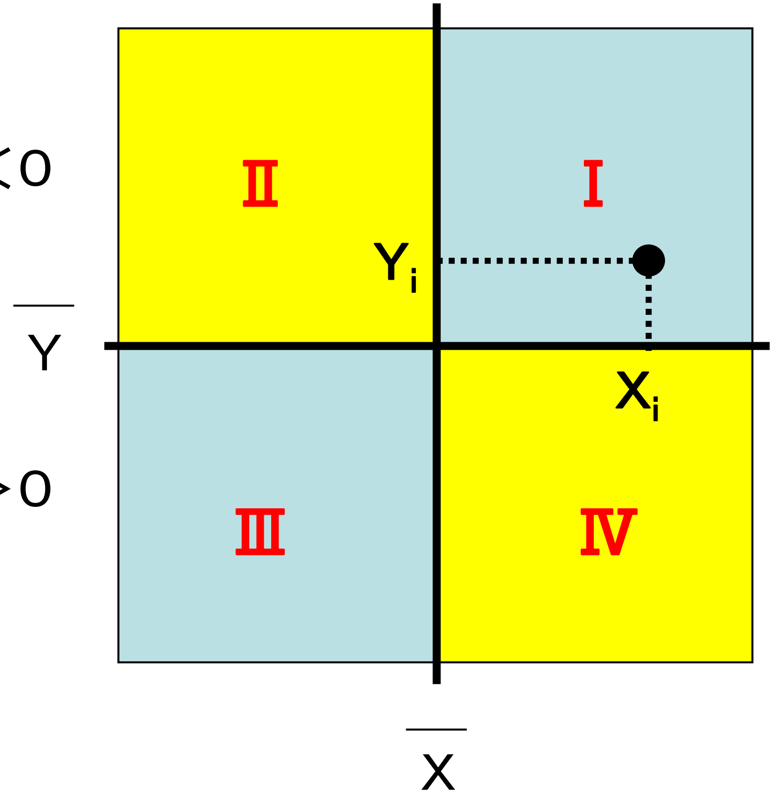
偏差積和

$$= (X_1-\overline{X})(Y_1-\overline{Y})+(X_2-\overline{X})(Y_2-\overline{Y})+\cdots+(X_N-\overline{X})(Y_N-\overline{Y})$$

Ⅰ、Ⅲのエリアに多く分布　⇒　偏差積和　＞　０　：　正の相関
Ⅱ、Ⅳのエリアに多く分布　⇒　偏差積和　＜　０　：　負の相関

$(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})<0$

$(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})>0$



$(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})>0$

$(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})<0$

（3）相関係数

- 相関係数は、2つの変量（X、Y）間の「直線的な比例関係の強さ」を示す指標。
- 共分散を、2つの標準偏差の積で割って定義する。
  - 相関係数は－1～＋1までの値をとる。「単位」を持たない無名数。
  - 相関係数の定義には、データ数Nが含まれていない（定義は1通りのみ）。

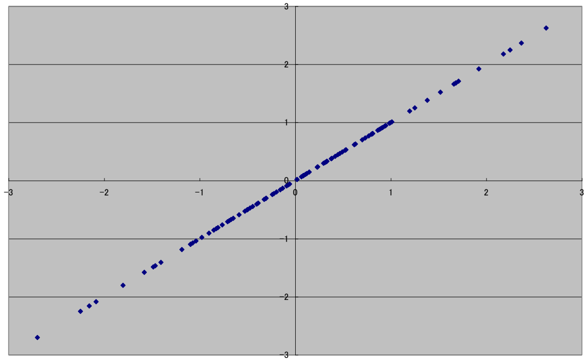
$$\rho(X,Y) = \frac{COV(X,Y)}{\sigma(X)\,\sigma(Y)}$$

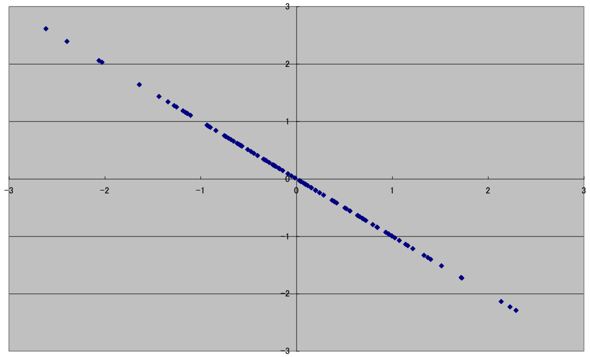
$$= \frac{(X_1-\overline{X})(Y_1-\overline{Y})+\cdots+(X_N-\overline{X})(Y_N-\overline{Y})}{\sqrt{(X_1-\overline{X})^2+\cdots+(X_N-\overline{X})^2}\sqrt{(Y_1-\overline{Y})^2+\cdots+(Y_N-\overline{Y})^2}}$$

- Excelでは、関数CORELL（データ範囲（X）、データ範囲（Y））を使って求める。

相関係数と散布図

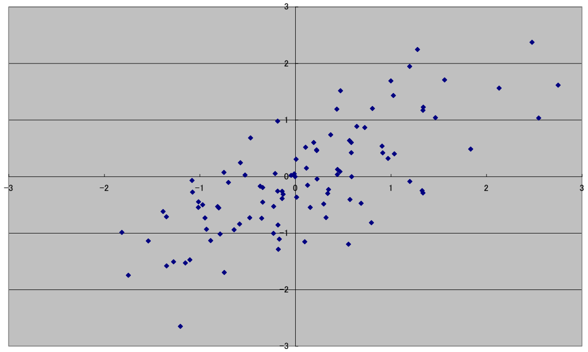
ρ＝1.0
（正の完全相関）

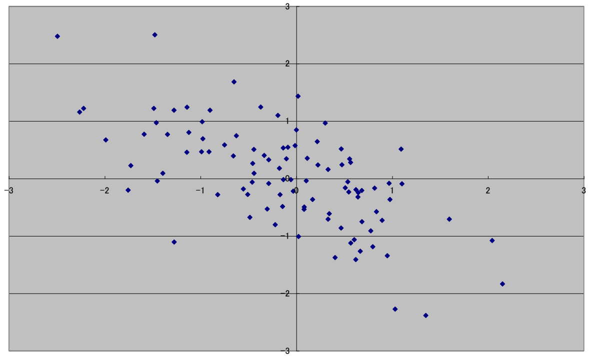




ρ＝－1.0
（負の完全相関）

ρ＝0.7





ρ＝－0.7

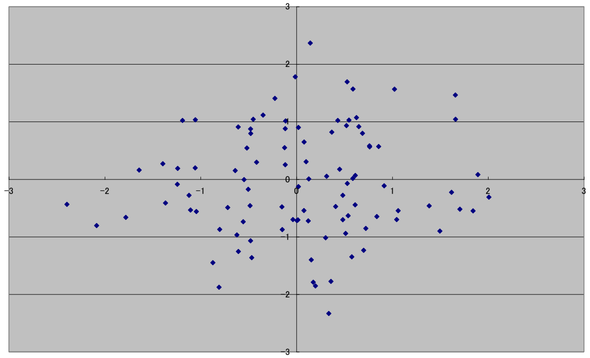
相関係数の定義

$\rho xy = COV(X,Y) / \sigma x \sigma y$

COV(X,Y) ： X,Yの共分散　＝(1/N-1)＊Σ(Xt－EX)(Yt－EY)

σx ： Xの標準偏差　　EX ： Xの平均値

σy ： Yの標準偏差　　EY ： Yの平均値



ρ＝0
（無相関）

（4）相関行列と分散共分散行列

太枠内が相関行列

	X_1	X_2	X_3	・・・	X_N
X_1	1	$\rho(X_1、X_2)$	$\rho(X_1、X_3)$	・・・	$\rho(X_1、X_N)$
X_2	$\rho(X_2、X_1)$	1	$\rho(X_2、X_3)$	・・・	$\rho(X_2、X_N)$
X_3	$\rho(X_3、X_1)$	$\rho(X_3、X_2)$	1	・・・	$\rho(X_1、X_2)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
X_N	$\rho(X_N、X_1)$	$\rho(X_N、X_2)$	$\rho(X_N、X_3)$	・・・	1

$\rho(X_i、X_i)=1$ ： 同じ変量（X_{ii}）同士の相関は1

$\rho(X_i、X_j)=\rho(X_j、X_i)$ ： 2つの変量（X_i、X_j）の順序を変えて計算しても相関係数の値は同じ。

太枠内が分散共分散行列

	X_1	X_2	X_3	・・・	X_N
X_1	V_{X1}	COV(X_1、X_2)	COV(X_1、X_3)	・・・	COV(X_1、X_N)
X_2	COV(X_2、X_1)	V_{X2}	COV(X_2、X_3)	・・・	COV(X_2、X_N)
X_3	COV(X_3、X_1)	COV(X_3、X_2)	V_{X3}	・・・	COV(X_1、X_2)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
X_N	COV(X_N、X_1)	COV(X_N、X_2)	COV(X_N、X_3)	・・・	V_{XN}

あとで、

　VaRの計測手法として、分散共分散法の説明をします。

　VaRの計測において、分散共分散行列、相関行列が重要な働きをします。

３．確率変数と確率分布

（１）確率変数

（２）確率分布

　　－　確率密度関数、分布関数

（３）様々な確率分布

　　－　一様分布、正規分布、対数正規分布

　　　　ポワソン分布、２項分布

（４）確率変数の独立

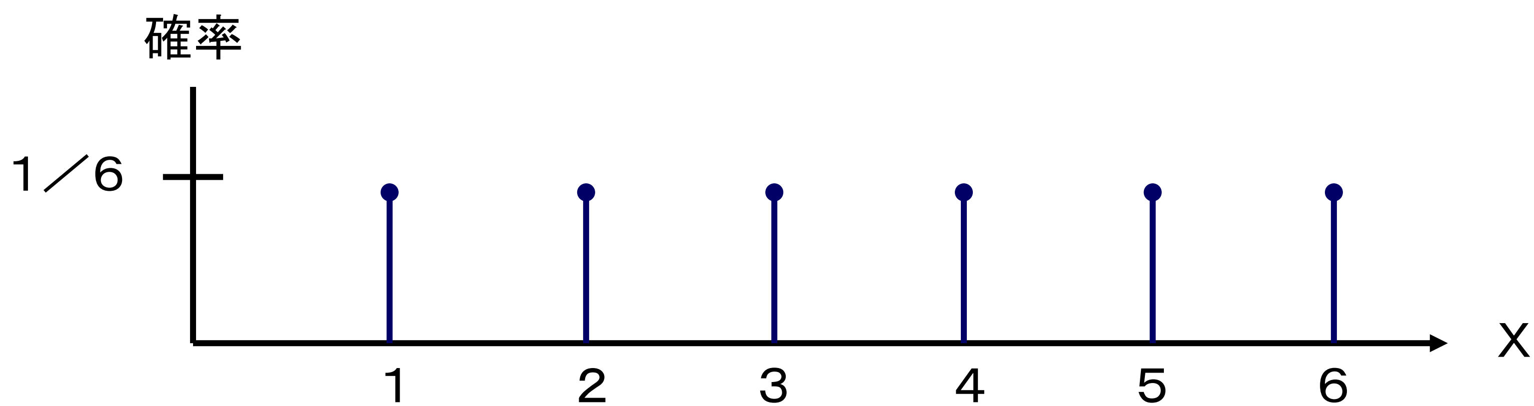
（1）確率変数

- 予め定まった確率にしたがって値が変動する数のことを「確率変数」という

（例）サイコロを振ったときに出る目の数

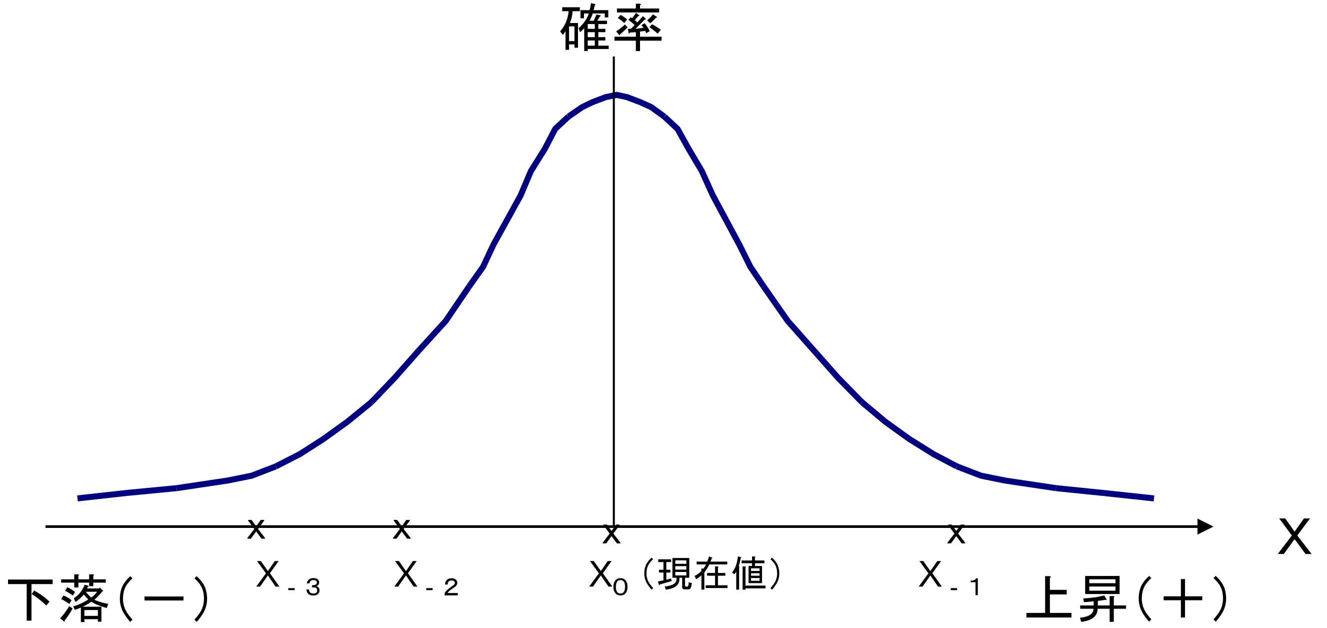
— 離散的な確率変数

サイコロの目（X）	1	2	3	4	5	6
確　　率	1／6	1／6	1／6	1／6	1／6	1／6



株価、金利、為替等の変化率を、
「確率変数」として捉えることも可能。

— 連続的な確率変数



その他の確率変数

- VaRを250回計測して、VaRを超える損失が発生する回数
- 事件・事故発生に伴う損失の発生額（1回当たり）
- 事件・事故の年間発生件数
- 個別企業の信用状態

（２）確率分布

・　確率分布を表わすとき、２種類の関数がある。

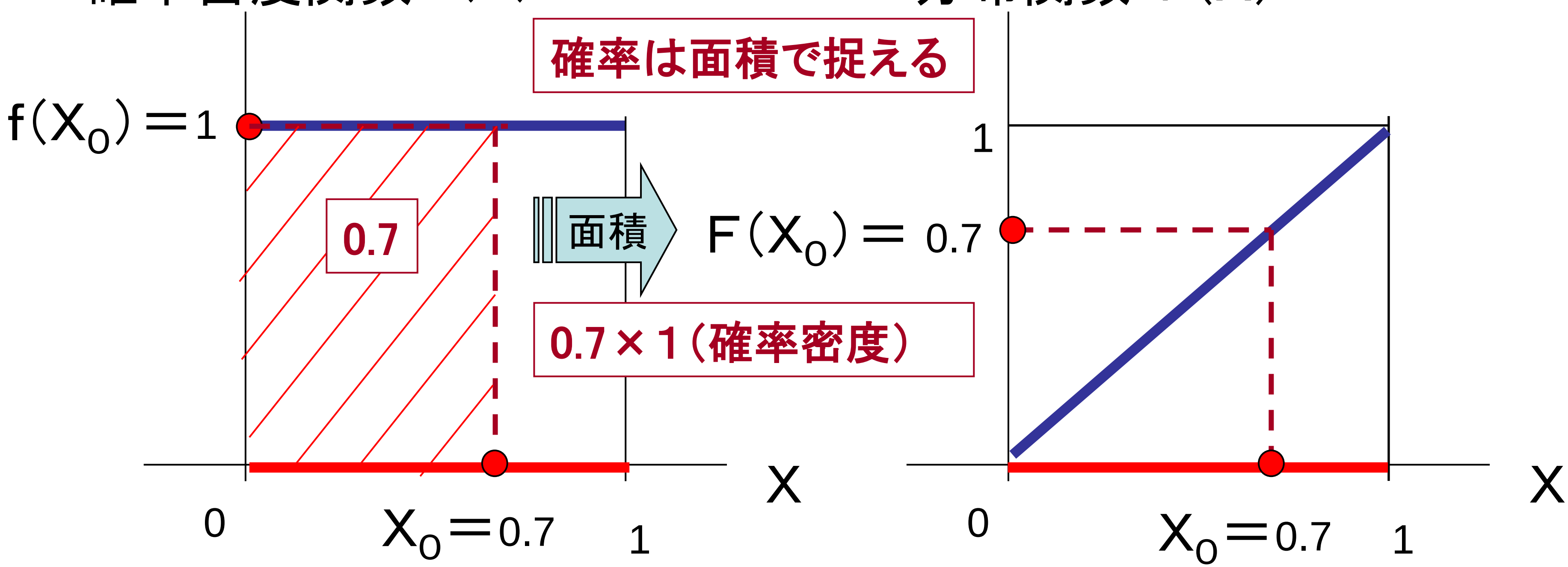
① 確率密度関数
確率変数（X）が **「ある値」をとる確率（確率密度）**
を表わす関数

② 分布関数（累積確率密度関数）
確率変数（X）が **「ある値以下」になる確率**を表わす関数

（例）数直線上で、0から1までの値をランダムにとる
確率変数（X）を考える。

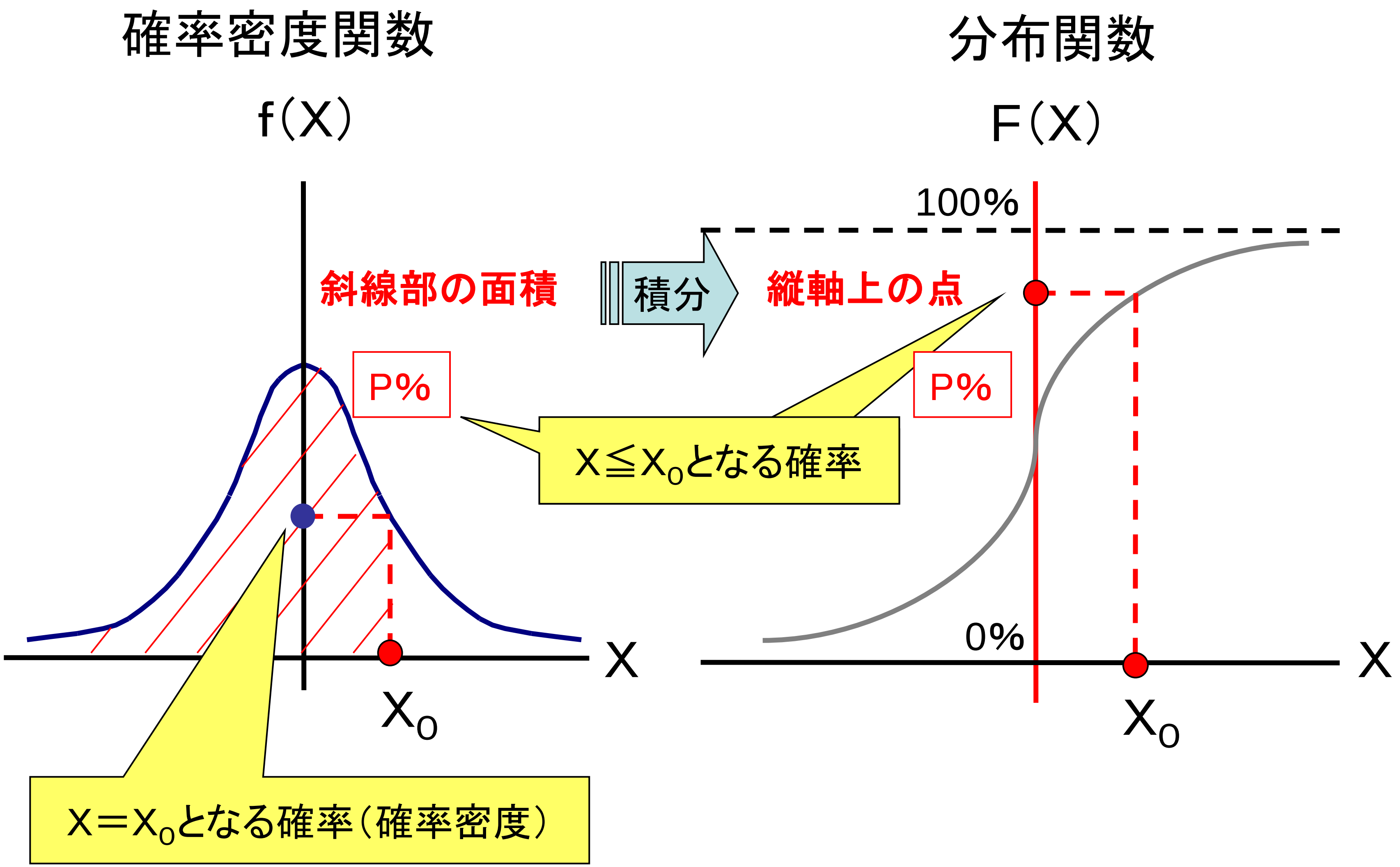
Xは 0～1の間で無限の値をとる可能性がある
Xが 0.7の値をとる確率はゼロ
Xが 0.7以下の値をとる確率は 0.7（斜線部の面積）

確率密度関数 f（X）　　　　分布関数 F（X）



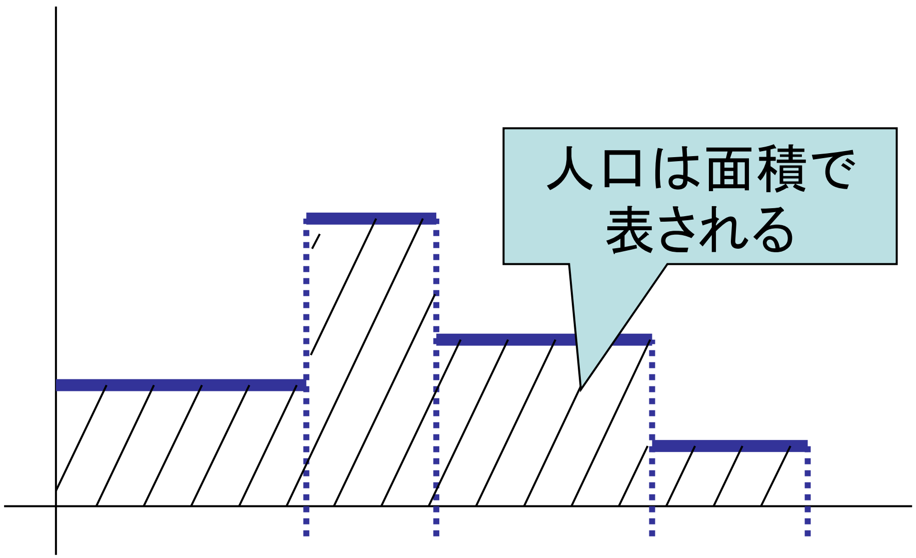
Xが 0.7の値をとる「確率密度」は 1

- より一般的に概念図で示すと



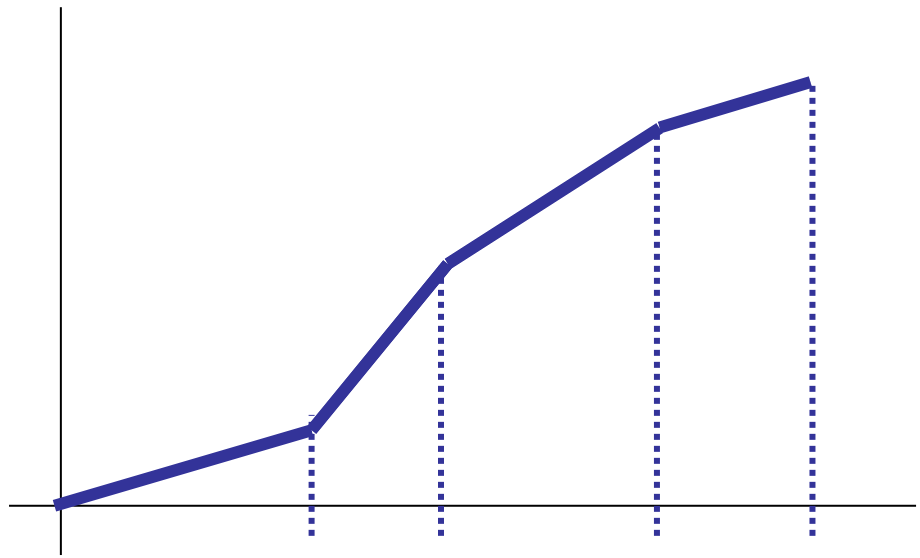
（参考）人口と人口密度

f(X)：人口密度（万人/km^2）



X　：各地域の広さ(km^2)

F(X)：人口（万人）

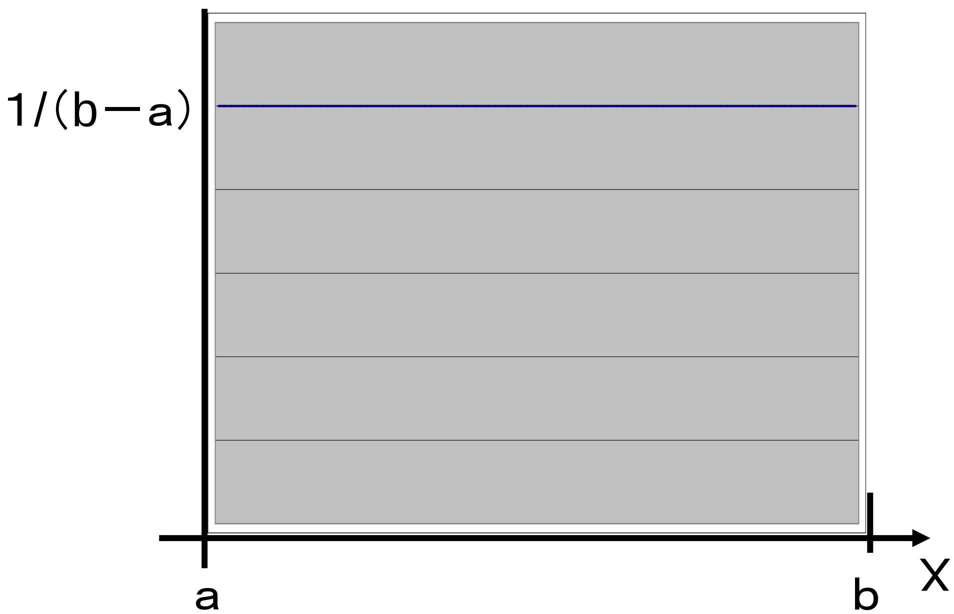


X　：各地域の広さ(km^2)

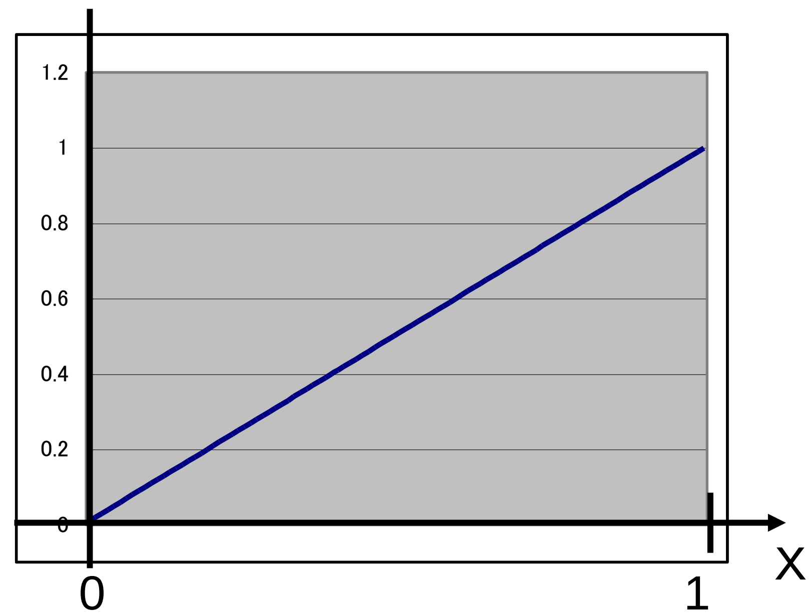
（3）様々な確率分布

一様分布：　ある区間の中の値が同じ確率で生起する分布。

f(X)　確率密度関数



F(X)　分布関数



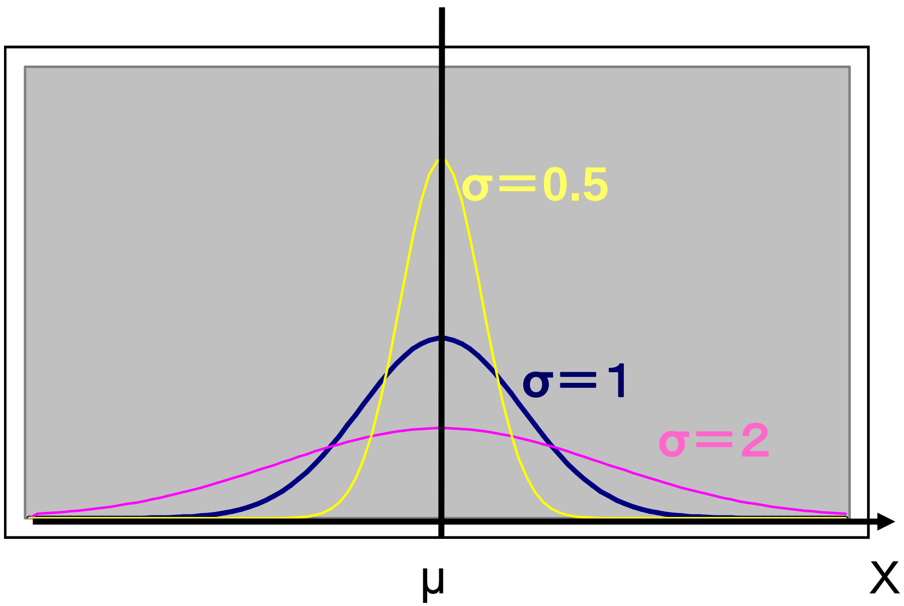
- 一様分布にしたがう乱数（一様乱数）は、Excel関数RAND()を使って生成することができる。

正規分布： 左右対称の釣鐘型をした確率分布。

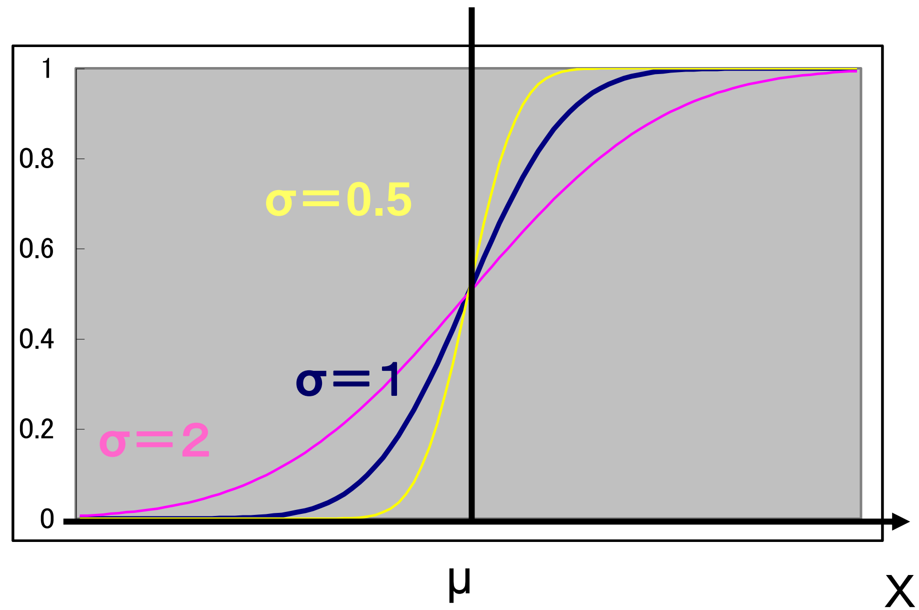
平均（μ）、標準偏差（σ）を与えると分布の形状が決まる。 ⇒ $N(\mu, \sigma^2)$と表す。

EXCEL関数 NORMDIST（X, μ, σ, 関数形式）

f（X） 確率密度関数



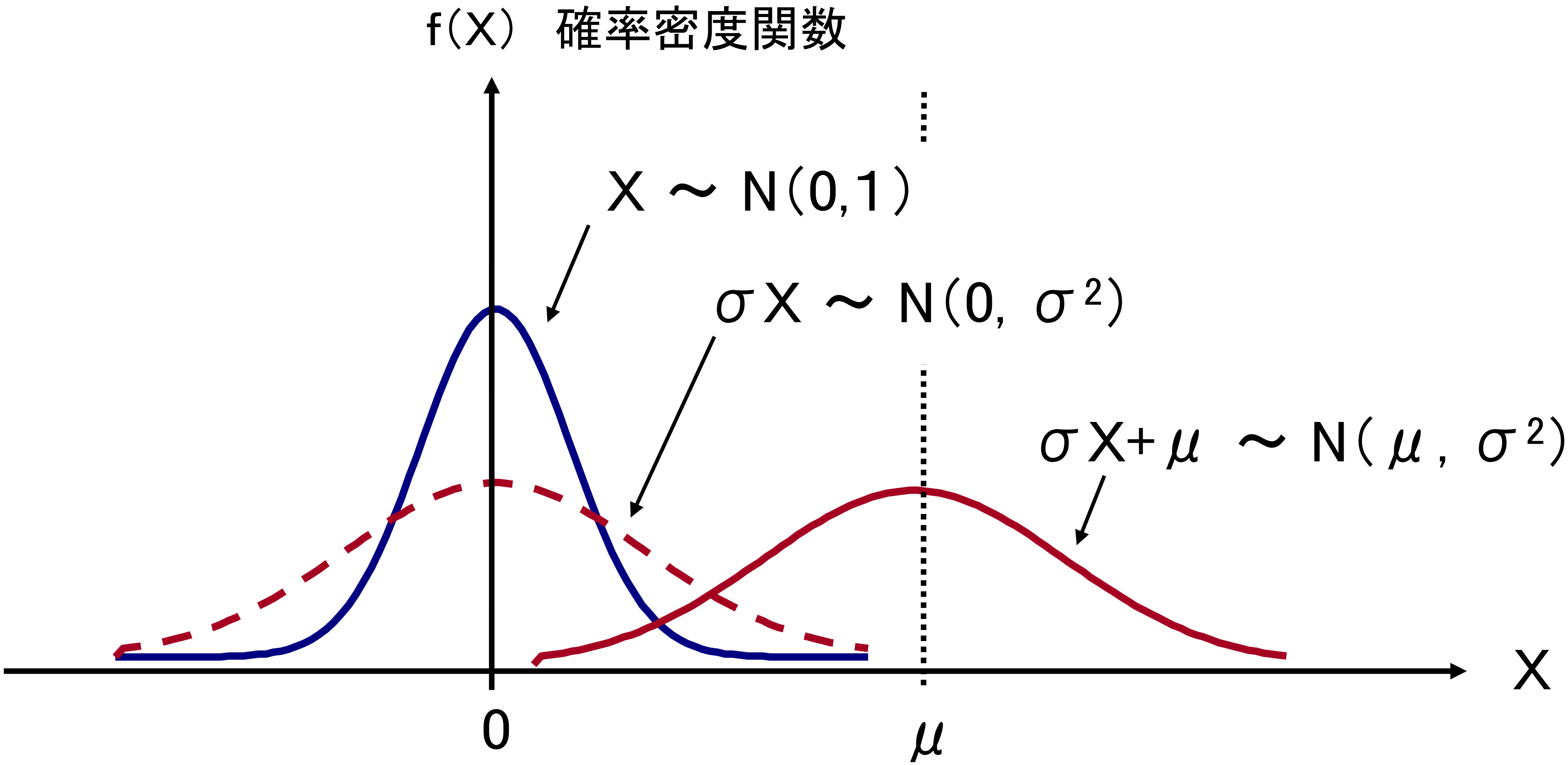
F（X） 分布関数



・ 平均（μ）＝0、標準偏差（σ）＝1の正規分布を**標準正規分布**と言い、N（0,1）と表す。

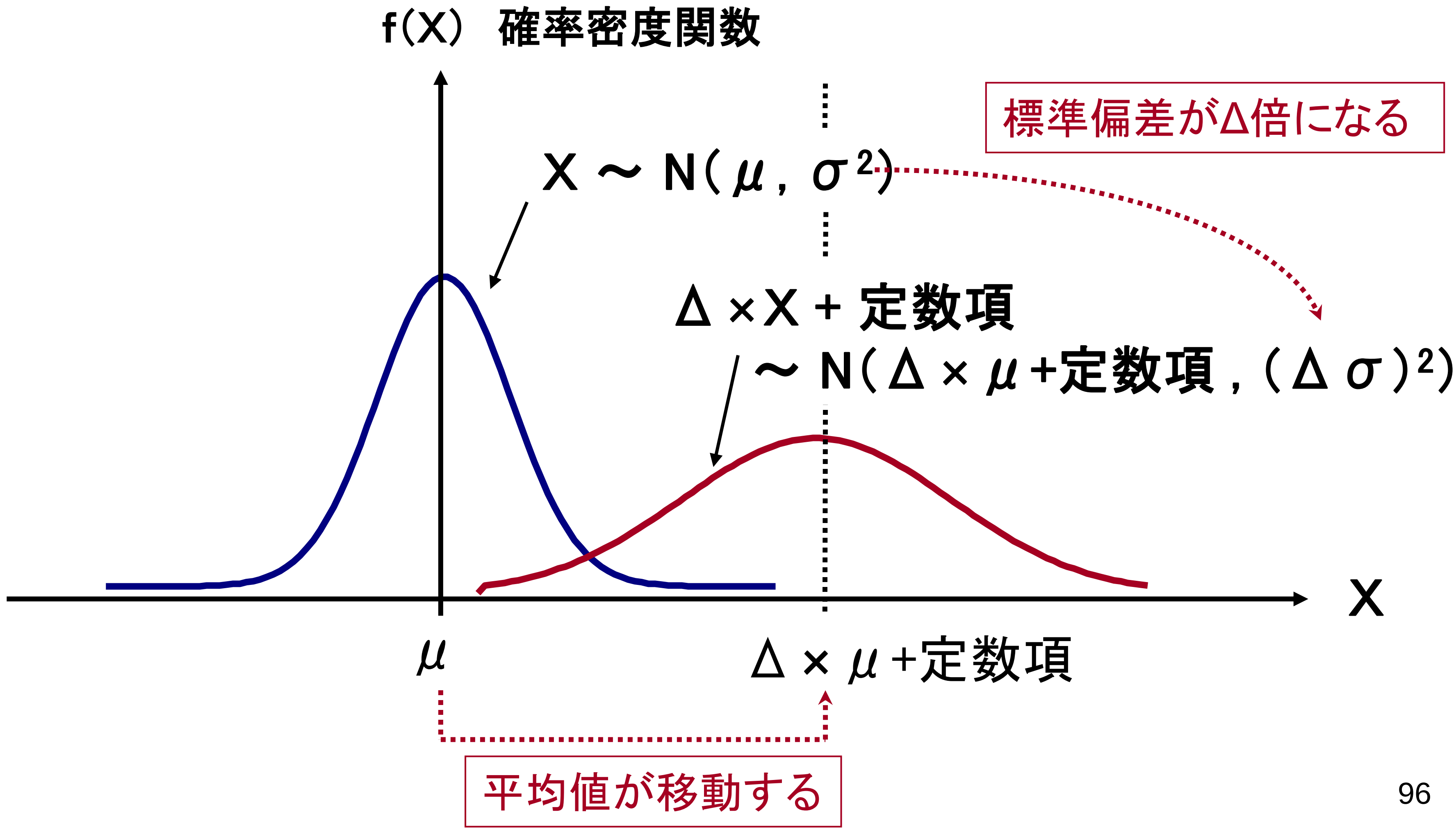
確率変数　X　が　標準正規分布にしたがうとき

確率変数　$\sigma X + \mu$　は　正規分布にしたがう。



確率変数 X が 正規分布にしたがうとき

確率変数 Δ×X＋定数項 は 正規分布にしたがう。



正規分布の特徴

- 平均からどれだけ離れているか（標準偏差の何倍か）という情報から、X以下の値をとる確率が分かる。
- 例えば、XがN(0, σ^2)の正規分布にしたがって生起するとき

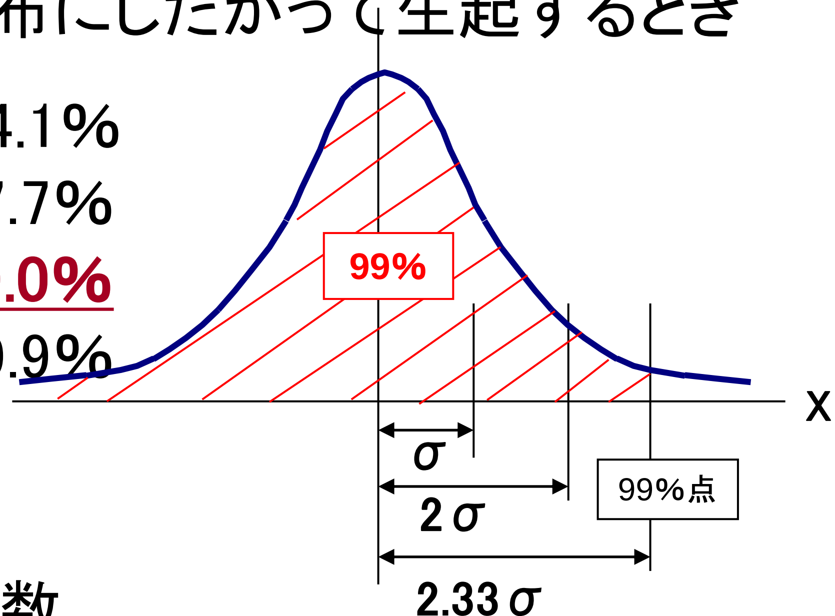
X ≦ σとなる確率は 84.1%

X ≦ 2σとなる確率は 97.7%

X ≦ 2.33σとなる確率は 99.0%

X ≦ 3σとなる確率は 99.9%

となることが知られている。

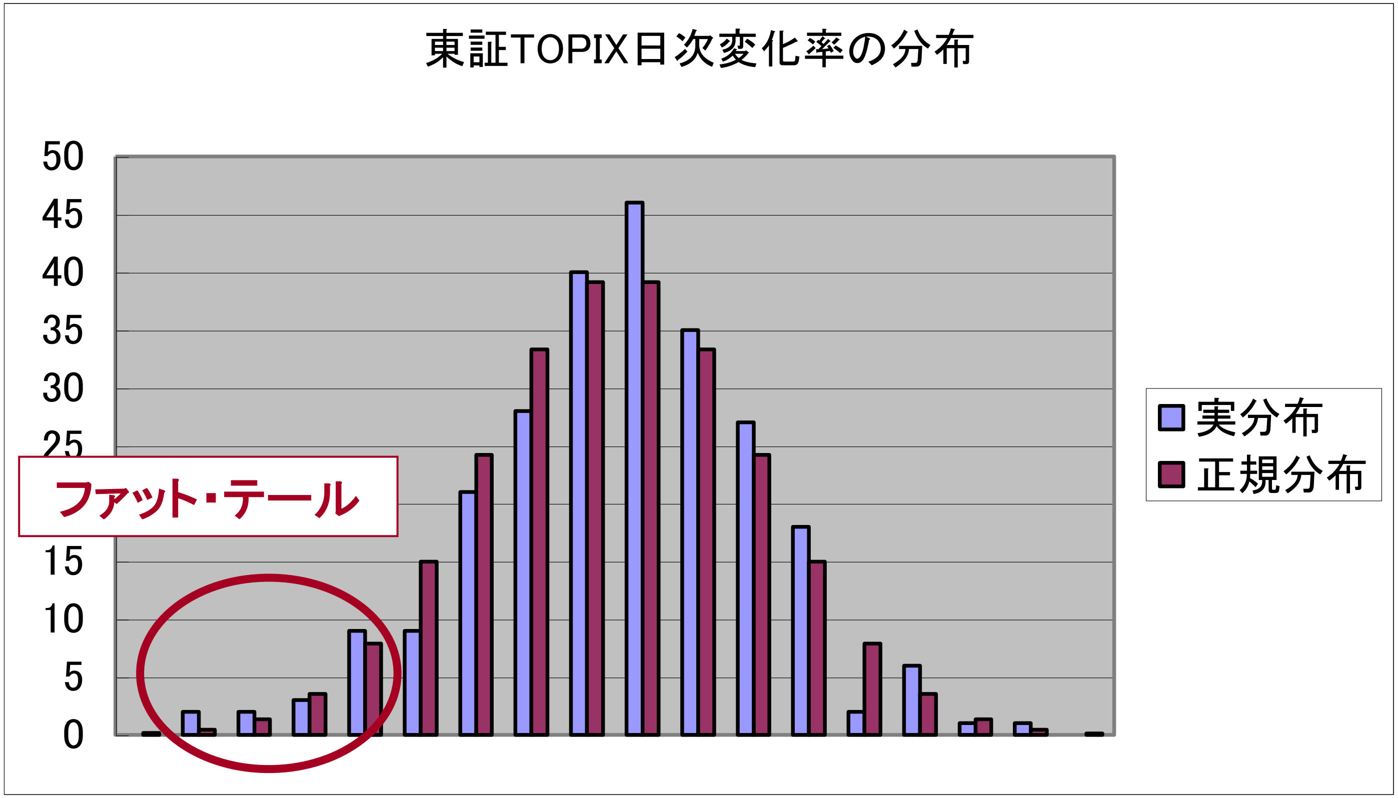


- このとき、σの前に付いている係数を「**信頼係数**」という。
- **正規分布は、Xが 「信頼係数」×σ以下となる確率が分かる**便利な確率分布の1つ。

株価、金利、為替等の変化率は、正規分布にしたがうと想定されることが多い。

－ しかし、実際の分布をみると、正規分布と比較して、歪み、偏りやファット・テール（注） が観察されることも少なくない。

（注）裾野部分の分布が厚くなることをいう。



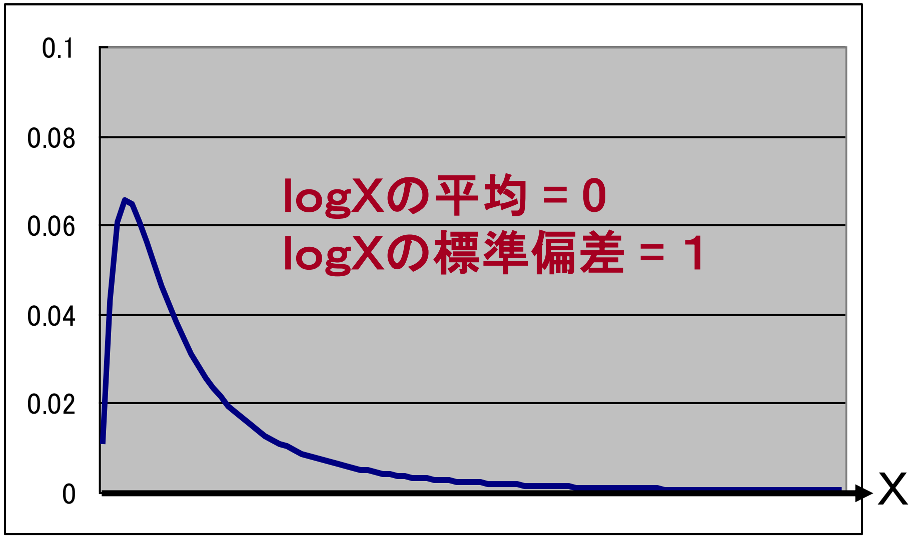
対数正規分布：

左右非対象、片側に裾野が長いファットテールな分布。

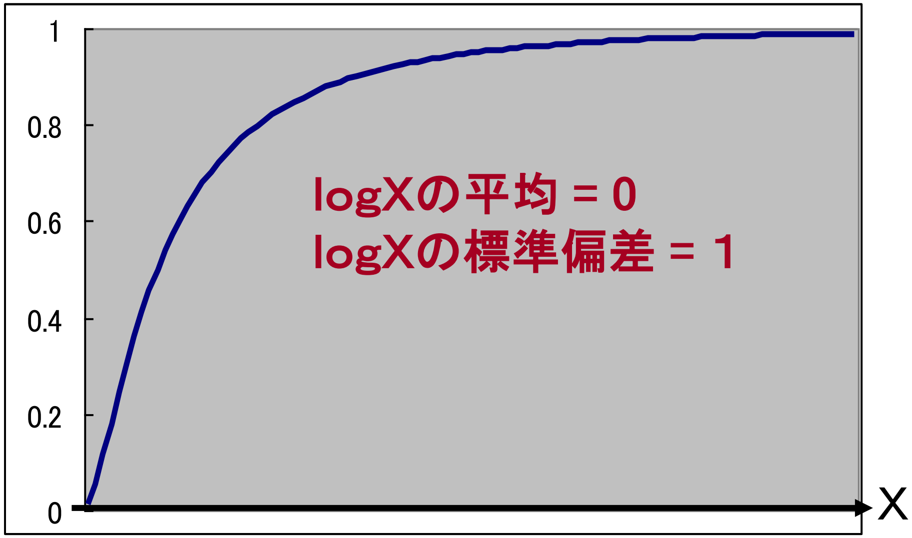
変数Xの対数値（logX）が正規分布にしたがうとき、
変数Xは対数正規分布にしたがう、と言う。
logXの平均（μ）、logXの標準偏差（σ）を与えると
分布の形状が決まる。

EXCEL関数　LOGNORMDIST（X, μ, σ）

f（X）　確率密度関数



F（X）　分布関数



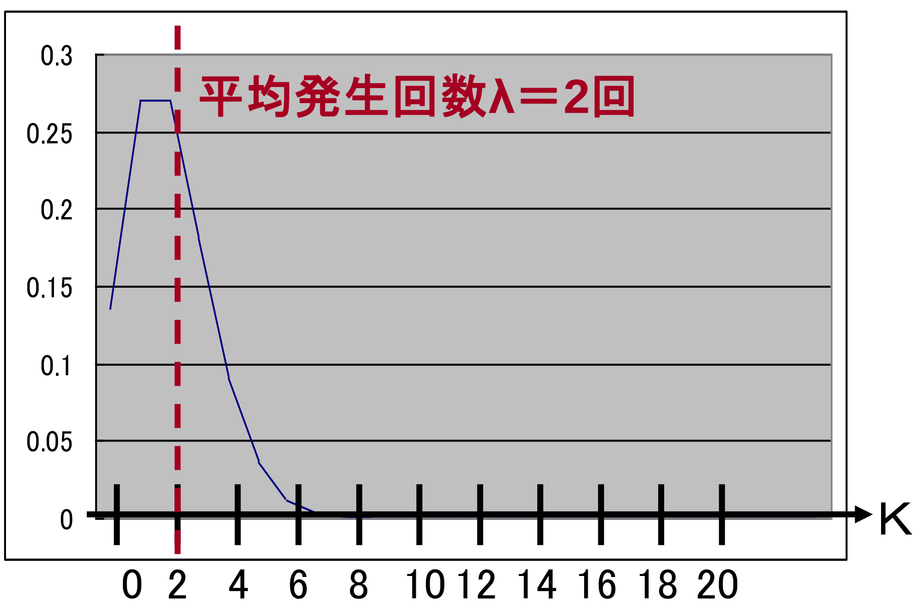
ポワソン分布:

所与の領域、あるいは、所与の時間内において、0回、1回、2回、3回・・・と発生する事象が、ちょうどK回発生する確率を示す。

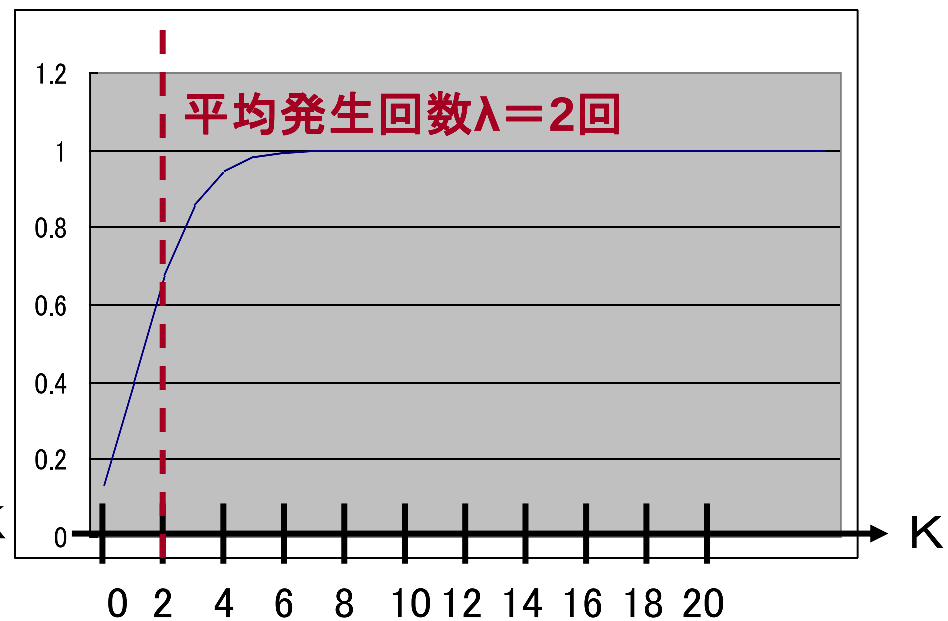
平均発生回数(λ回)を与えると分布の形状が決まる。

EXCEL関数　POISSON(K, λ, 関数形式)

f(K)　確率密度関数



F(K)　分布関数



たとえば

市場VaRを計測（分散共分散法）するとき
正規分布を利用します。

信用VaRを計測（モンテカルロ・シミュレーション法）するとき、正規分布を利用します。

オペリスクVaRを計測（モンテカルロ・シミュレーション法）するとき、対数正規分布とポワソン分布を利用します。

— 実務的には、フィットのよい別の確率分布を利用することもあります。

市場VaRの公式（分散共分散法）

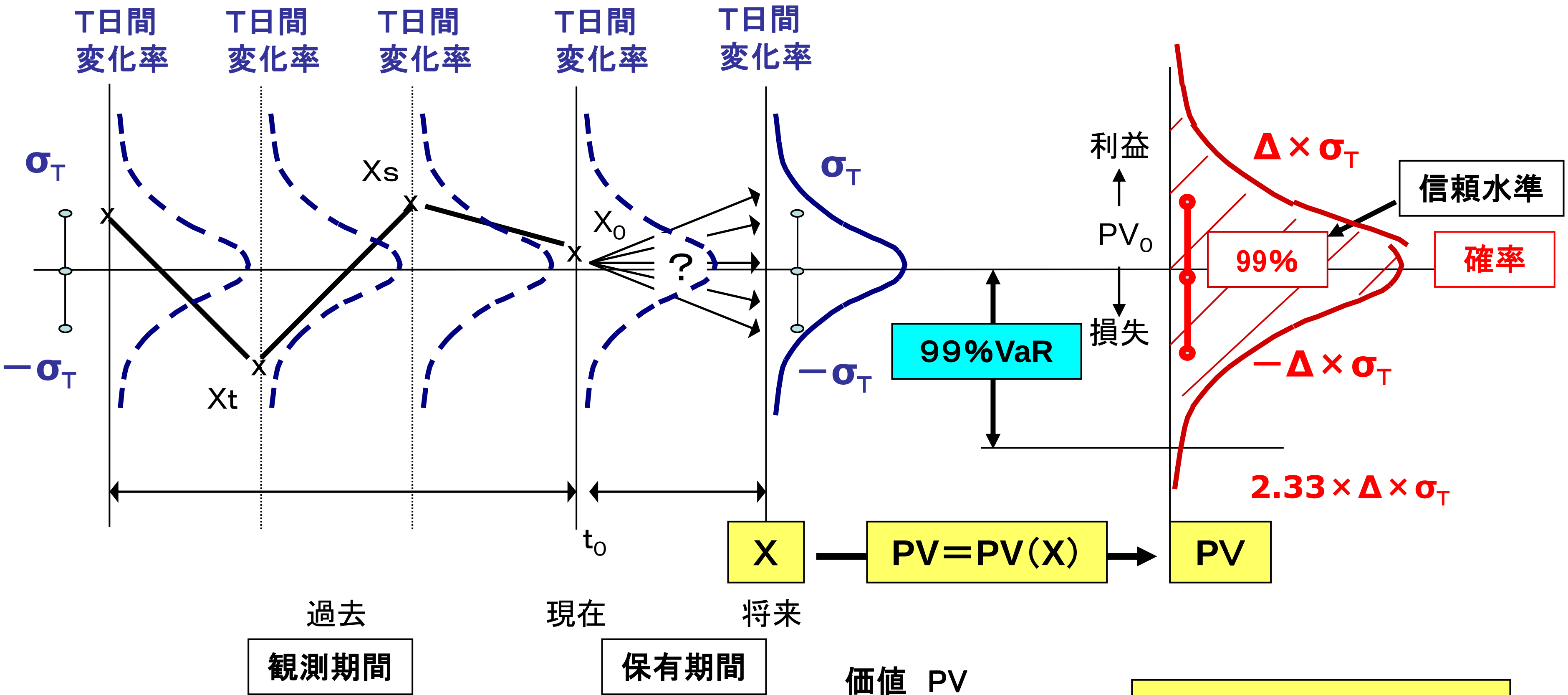
①リスクファクターが正規分布にしたがって変動し、

②リスクファクターに対する当該資産・負債の現在価値の

感応度（デルタ）が一定であると仮定して、

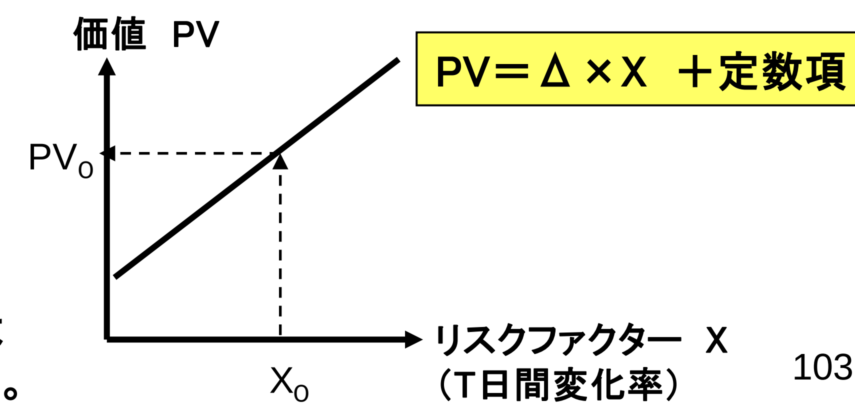
VaRを算出する。

分散共分散法（ムービング・ウィンドウ法）



仮定①
リスクファクターの確率分布は
正規分布（ i. i. d. ）

仮定②
Δは一定、すなわち、ポートフォリオ価値PVは
リスクファクターの１次関数としてあらわされる。



	信頼係数		感応度	ボラティリティ
VaR ＝	2．33	×	Δ	× σ_T

◆ VaRは、リスクファクターのボラティリティと、リスクファクターの変動に対する現在価値の感応度を考慮したリスク指標。

ボラティリティ ＝ リスクファクターがどれだけ変動するか
（σ_T: 変化率の標準偏差）

感応度 ＝ ポートフォリオの現在価値の変動は、リスクファクターの変動を受けてどれだけ増幅されるか
（Δ: 関数式の傾き）

分散共分散法（ムービング・ウィンドウ法）の計算例

（例）投信残高（PV）　　:100億円（東証TOPIX指数に完全連動）

リスクファクター（X_t）:　東証TOPIXの10日間変化率（注1）

⇒　X_tは、同一かつ互いに独立な正規分布 N（0, σ^2）にしたがって変動すると仮定。

観測期間　:　250日

保有期間　:　10日間

信頼水準　:　99%

現在価値の変化額 ＝ 100億円 ×東証TOPIXの10日間変化率

VaR＝ 信頼係数 × 感応度（Δ） × リスクファクターの標準偏差（σ_T）

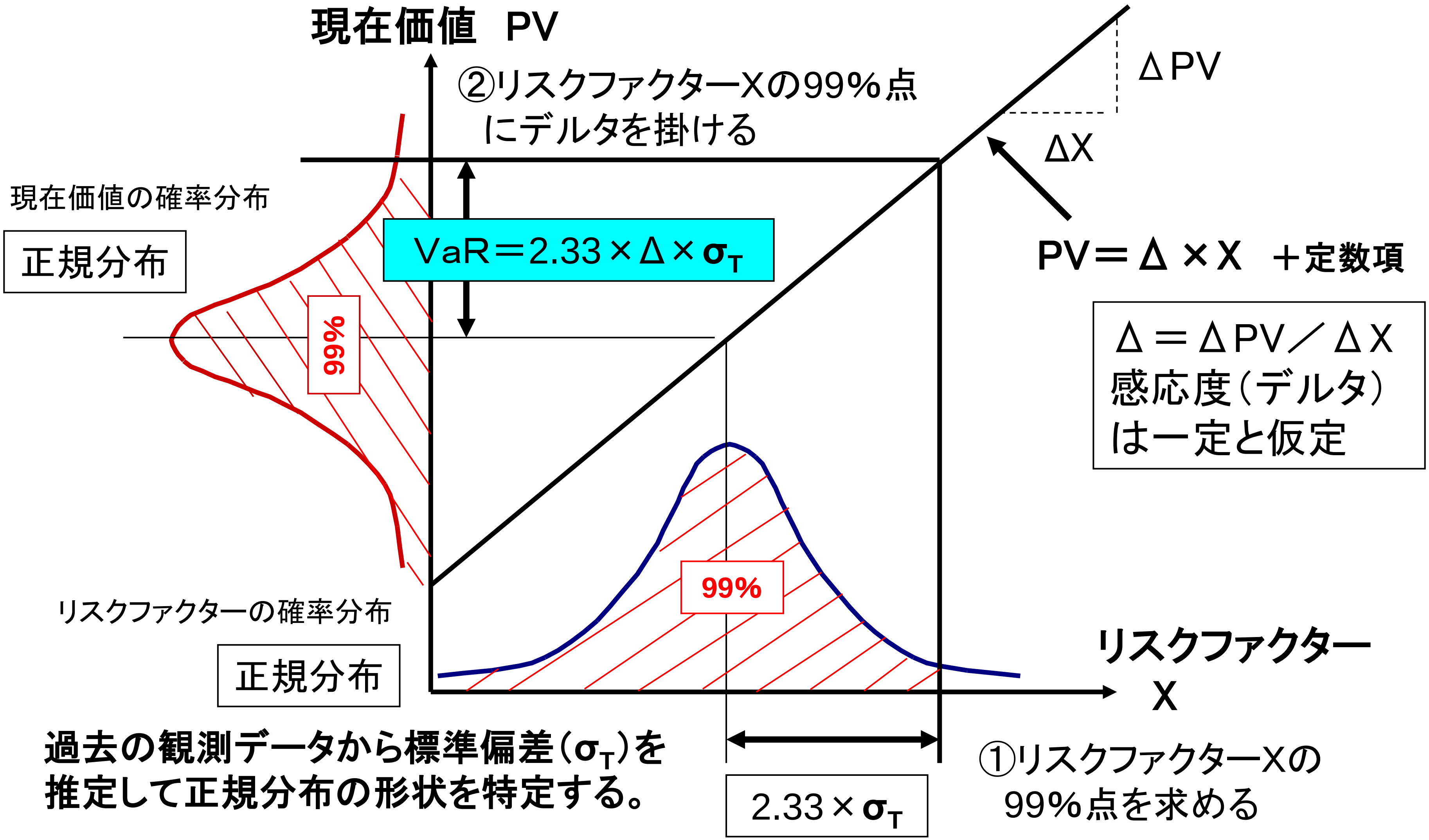
＝ **2.33** × **100億円**（注2） × σ_T

＝ **100億円**（注2） × **2.33** × σ_T

（注1）リスクファクターとしては、金利、為替、株価等の変化率（幅）を利用することが多い。

（注2）感応度（Δ）は100億円（＝現在価値の変動額÷東証TOPIXの10日間変化率）。

分散共分散法（ムービング・ウィンドウ法）



過去の観測データから標準偏差（σ_T）を推定して正規分布の形状を特定する。

分散共分散法(ムービング・ウィンドウ法)による計算例

VaRの計算シート

株式投信	100	億円
観測データ	250	

分散共分散法(デルタ法)

保有期間	10	日
信頼水準	99.00	%
信頼係数(関数NORMSINV)	2.33	
標準偏差(関数STDEVA)	3.869	%

↑ 正規分布と想定 ↑

↓ 信頼係数×標準偏差 ↓

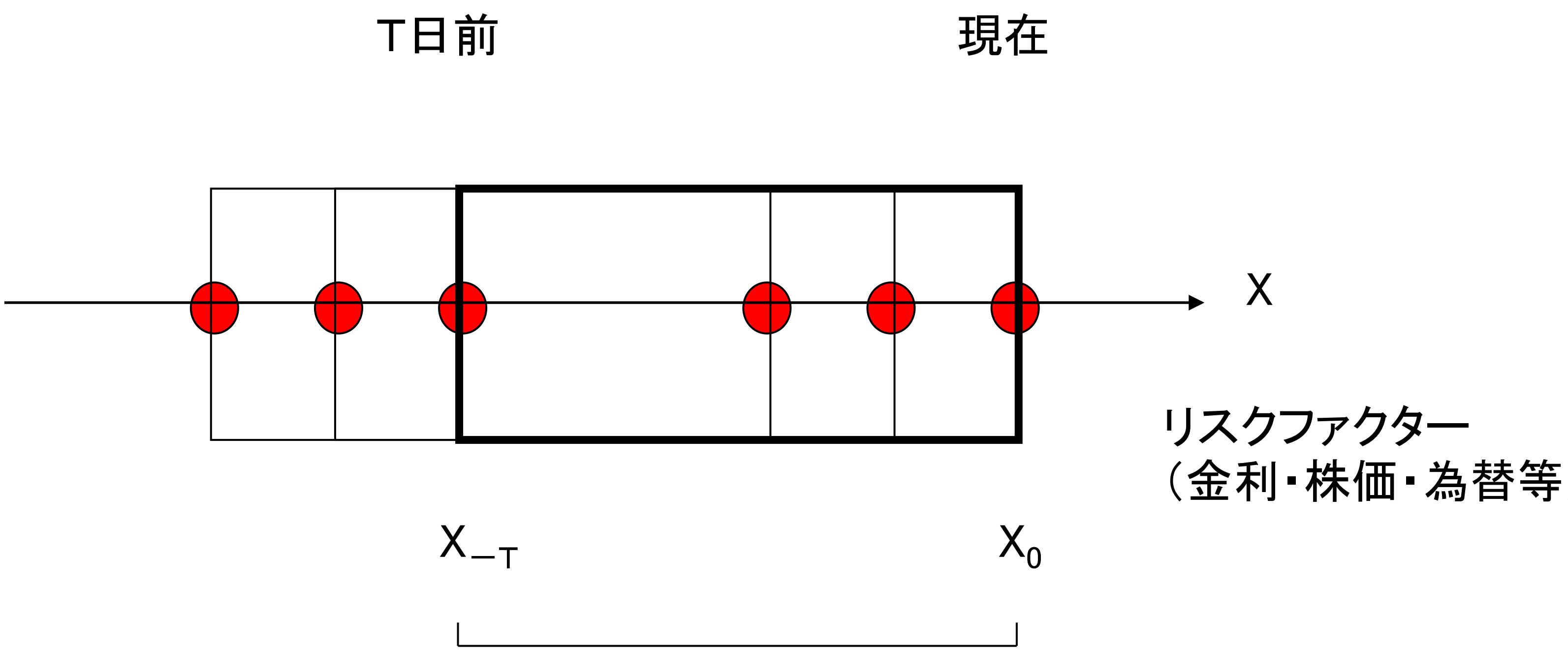
	10日間変化率
2006/9/29	0.785
2006/9/28	1.194
2006/9/27	0.319
2006/9/26	−2.994
2006/9/25	−3.783
2006/9/22	−3.139
2006/9/21	−3.894
2006/9/20	−5.040
2006/9/19	−3.538
2006/9/15	−2.474
2006/9/14	−2.248
2006/9/13	−1.822
2006/9/12	−1.875

予想変化率		感応度		VaR	
9.000	×	100	=	9.00	億円

PV＝Δ*X
PV ： 株式投信価額
X ： 東証TOPIX指数の変化率
Δ ： 直近時点の株式価額(PV_0)×1

MW法 ： ムービング・ウィンドウ法

ムービング・ウィンドウ法の名前の由来



T日間変化率

$= \log(X_0 / X_{-T})$

（4）確率変数の独立

【定義】

- 確率変数　X_1、X_2 が互いに影響されず、
それぞれの確率分布にしたがって値をとるとき、
確率変数　X_1、X_2　は、互いに「独立」であるという。

（例）サイコロを振ったときに出る目の数

１回目： X_1 ＝ １、 ２回目： X_2 ＝ １

３回目： X_3 ＝ ？

サイコロの目（X_3）	１	２	３	４	５	６
確　　率	１／６	１／６	１／６	１／６	１／６	１／６

- ２回続けて1の目が出ても、3回目の結果には影響を及ぼさない。
- ３回目は、いずれの目が出る確率も1／６。

i. i. d. とは

互いに独立かつ同一の確率分布にしたがう

independently and identically distributed

【i. i. d. の定義】

- 確率変数 X_t、X_sについて、以下の2つの条件を満たすとき、確率変数 X_t、X_sは互いに「 i. i. d. 」であると言う。

①確率変数 X_t、X_sは互いに独立である。

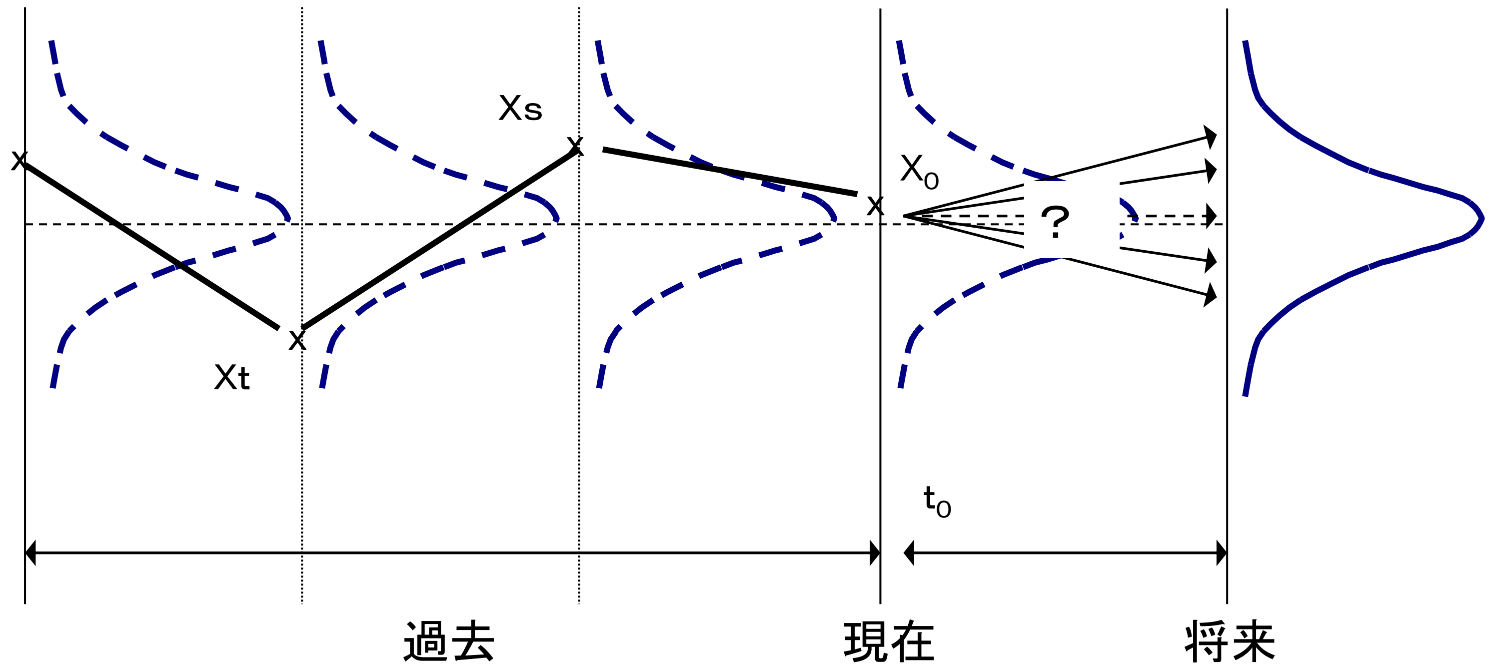
②確率変数 X_t、X_sは同一の確率分布にしたがう。

株価、金利、為替等の変化について

互いに独立かつ同一の確率分布にしたがって変動している、と考えられることが多い。

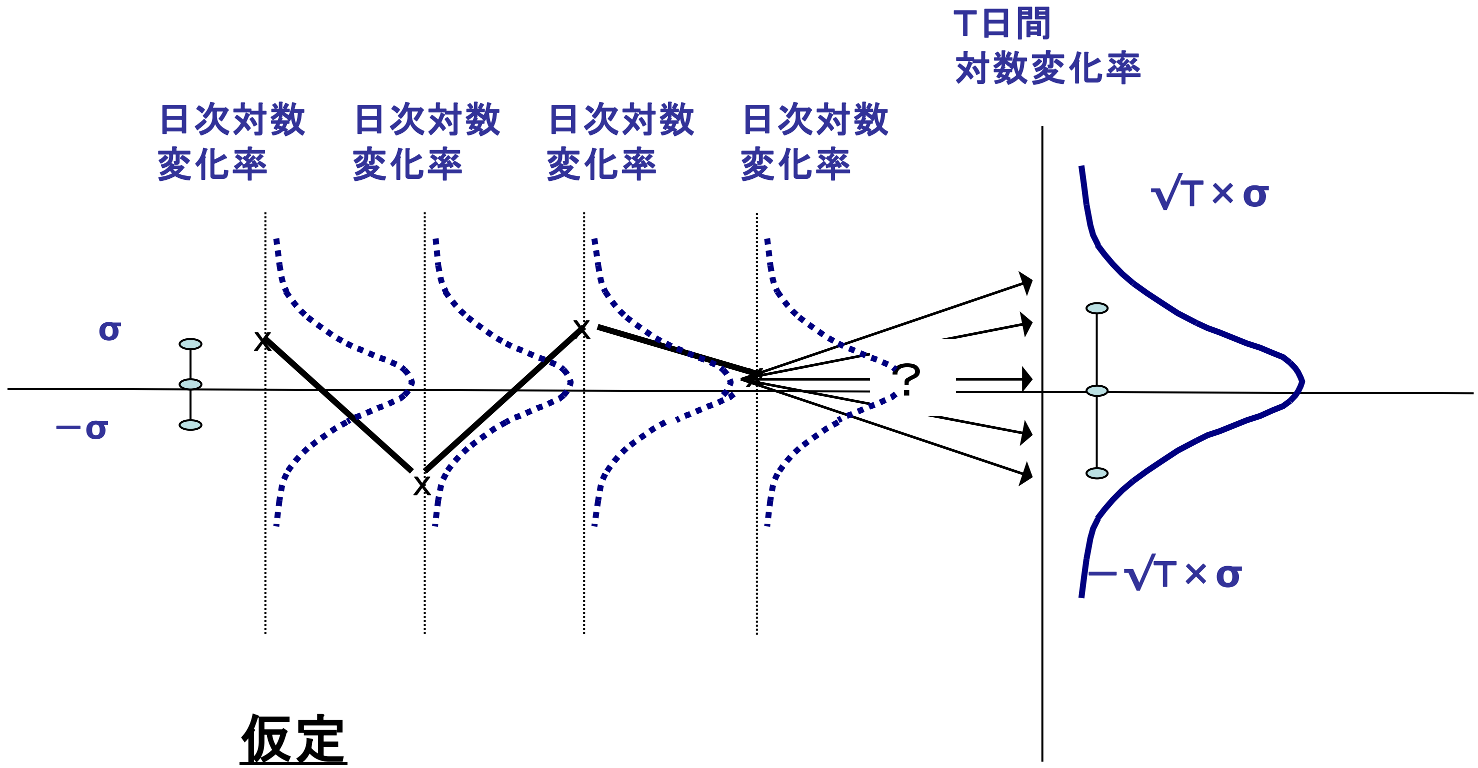
⇒ i.i.d.の想定

確率変数 X の推移と、その確率分布



ルートT倍ルール

日次のボラティリティ（変化率の標準偏差）をσとすると
T日間のボラティリティ（同）は$\sqrt{T}\times\sigma$となる。



仮定

- 日次変化率の確率分布はi. i. d.
- 変化率は対数変化率

（参考）対数変化率の定義

日次対数変化率

$$\log \frac{X_t}{X_{t-1}} \fallingdotseq \frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}} = \frac{X_t}{X_{t-1}} - 1$$

10日間対数変化率

$$\log \frac{X_t}{X_{t-10}} \fallingdotseq \frac{X_t - X_{t-10}}{X_{t-10}} = \frac{X_t}{X_{t-10}} - 1$$

- 対数変化率は、通常の変化率と近似的に等しいことが知られている。
- log（自然対数）は、Excelでは関数LN（・）で与えられる。

【ルートT倍ルール】

各期のリスクファクターを日次の対数変化率 or 変化幅として、
互いに独立かつ同一の確率分布にしたがうと想定する。【i.i.dの定義】

日次の対数変化率 or 変化幅を X_1、X_2、・・・、X_T とすると、
T日間の対数変化率 or 変化幅は、以下の足し算であらわされる。
$X_1 + X_2 + \cdots + X_T$

日次の対数変化率 or 変化幅 X_1、X_2、・・・、X_Tの
分散が σ^2
<u>標準偏差が σ とすると</u>

このとき、T日間の対数変化率 or 変化幅 $X_1 + X_2 + \cdots + X_T$の
分散は $T \times \sigma^2$
<u>標準偏差は $\sqrt{T} \times \sigma$ となる。</u>

対数変化率の特徴

- 対数変化率は、同率の低下、上昇により、元の値に戻る。
- T日間対数変化率は、日次対数変化率（T日分）の和となる。

	変化率(日次)	対数変化率（日次）
100	0.0101	0.0101
99	−0.0100	−0.0101
100	0.0526	0.0513
95	−0.0500	−0.0513
100	0.1111	0.1054
90	−0.1000	−0.1054
100	0.2500	0.2231
80	−0.2000	−0.2231
100	0.4286	0.3567
70	−0.3000	−0.3567
100	0.6667	0.5108
60	−0.4000	−0.5108
100	1.0000	0.6931
50	−0.5000	−0.6931
100	—	—

		対数変化率（日次）
X10	100	0.2877
X9	75	−0.4700
X8	120	1.3863
X7	30	−0.6931
X6	60	−0.9163
X5	150	0.5108
X4	90	1.0986
X3	30	−0.6931
X2	60	−0.2877
X1	80	−0.1178
X0	90	—
$\Sigma \log(X_t/X_{t-1})$		0.1054

	対数変化率（10日間）
log(X10/X0)	0.1054

【定理】

- 確率変数 X_1、X_2 が互いに「独立」のとき、以下のことが成り立つ。

① 確立変数 X_1X_2 の期待値は、それぞれの確率変数の期待値の積になる。

$$E(X_1X_2)=E(X_1)E(X_2)$$

② 確率変数 X_1+X_2 の分散は、それぞれの確率変数の分散の和に等しい。

$$V(X_1+X_2)=V(X_1)+V(X_2)$$

③ 確率変数 X_1 と X_2 は無相関である。

$$\rho(X_1, X_2)=0$$

（証明省略）

確率変数　X_1、X_2、・・・、X_T が独立であれば

確率変数　$X_1 + X_2 + \cdots + X_T$の分散について

上記定理を使って、以下が成立することが証明できる。

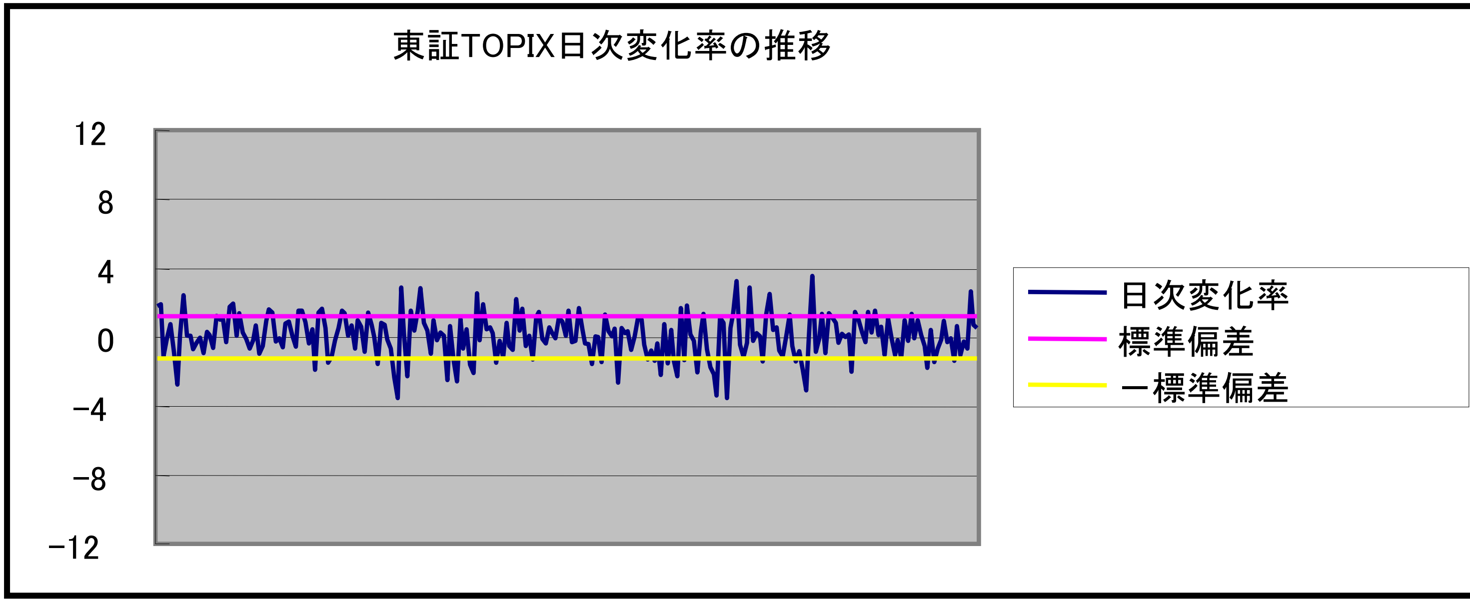
$V(X_1 + X_2 + \cdots + X_T) = V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_T)$

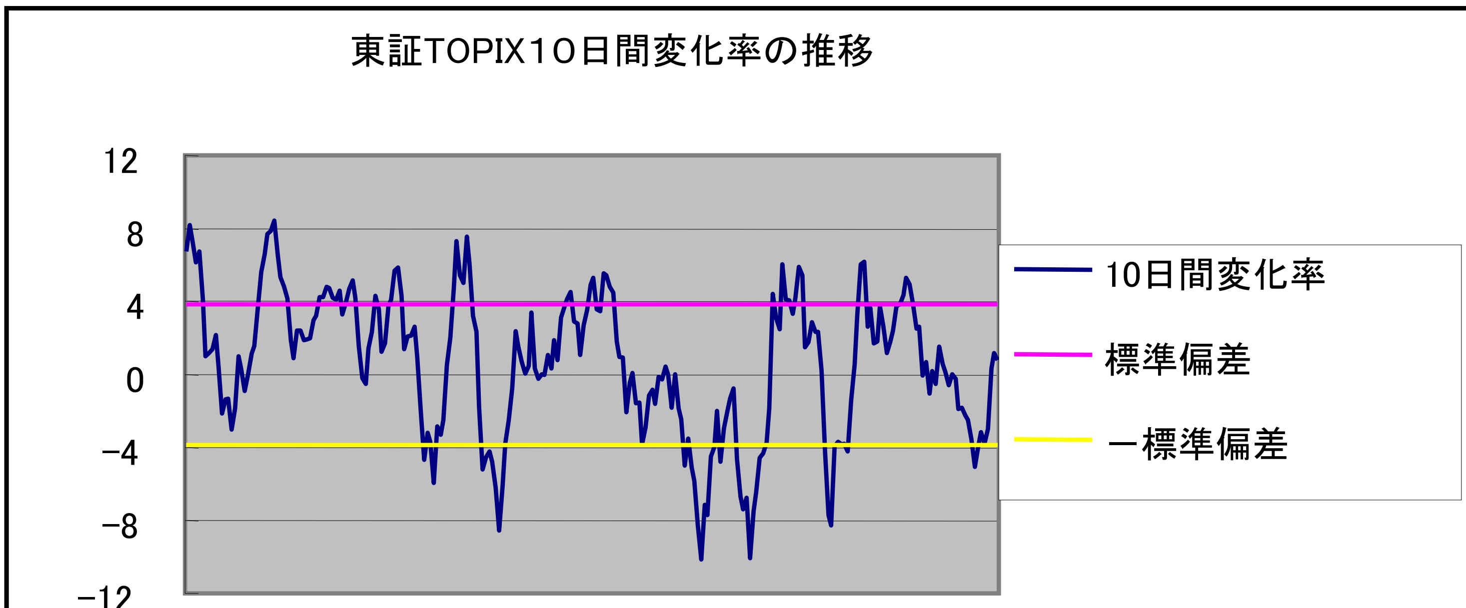
また、確率変数　X_1、X_2、・・・、X_T が同一の分布に

したがうのであれば、

その分散はすべて同じ値（σ^2）となる

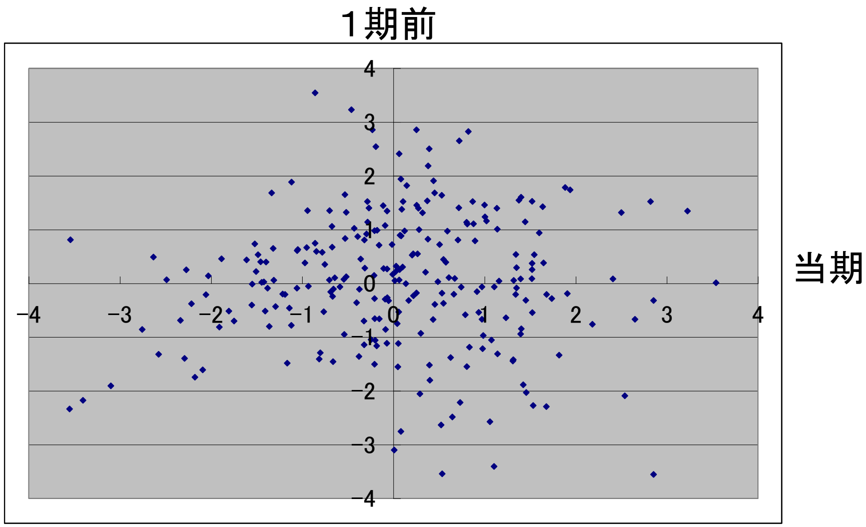
$V(X_1) = V(X_2) = \cdots = V(X_T) = \sigma^2$


東証TOPIX日次変化率の推移
12
8
4
0
−4
−8
−12
日次変化率
標準偏差
ー標準偏差


東証TOPIX10日間変化率の推移
12
8
4
0
−4
−8
−12
10日間変化率
標準偏差
ー標準偏差

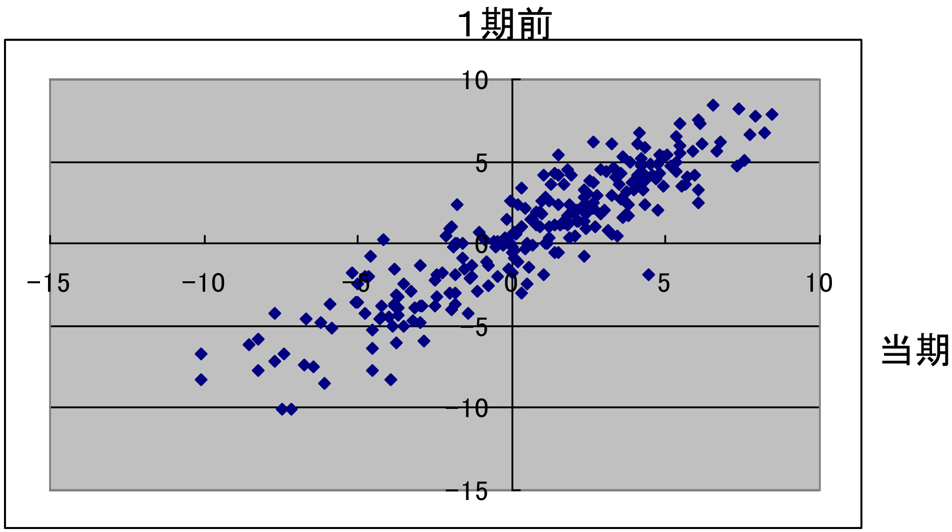
- 下図は、過去1年間のデータをもとに、東証TOPIX・変化率と、1期前の変化率との相関関係（自己相関）をみたもの。

東証TOPIX・日次変化率



相関係数 ρ ＝0.037

東証TOPIX・10日間変化率



相関係数 ρ ＝0.905

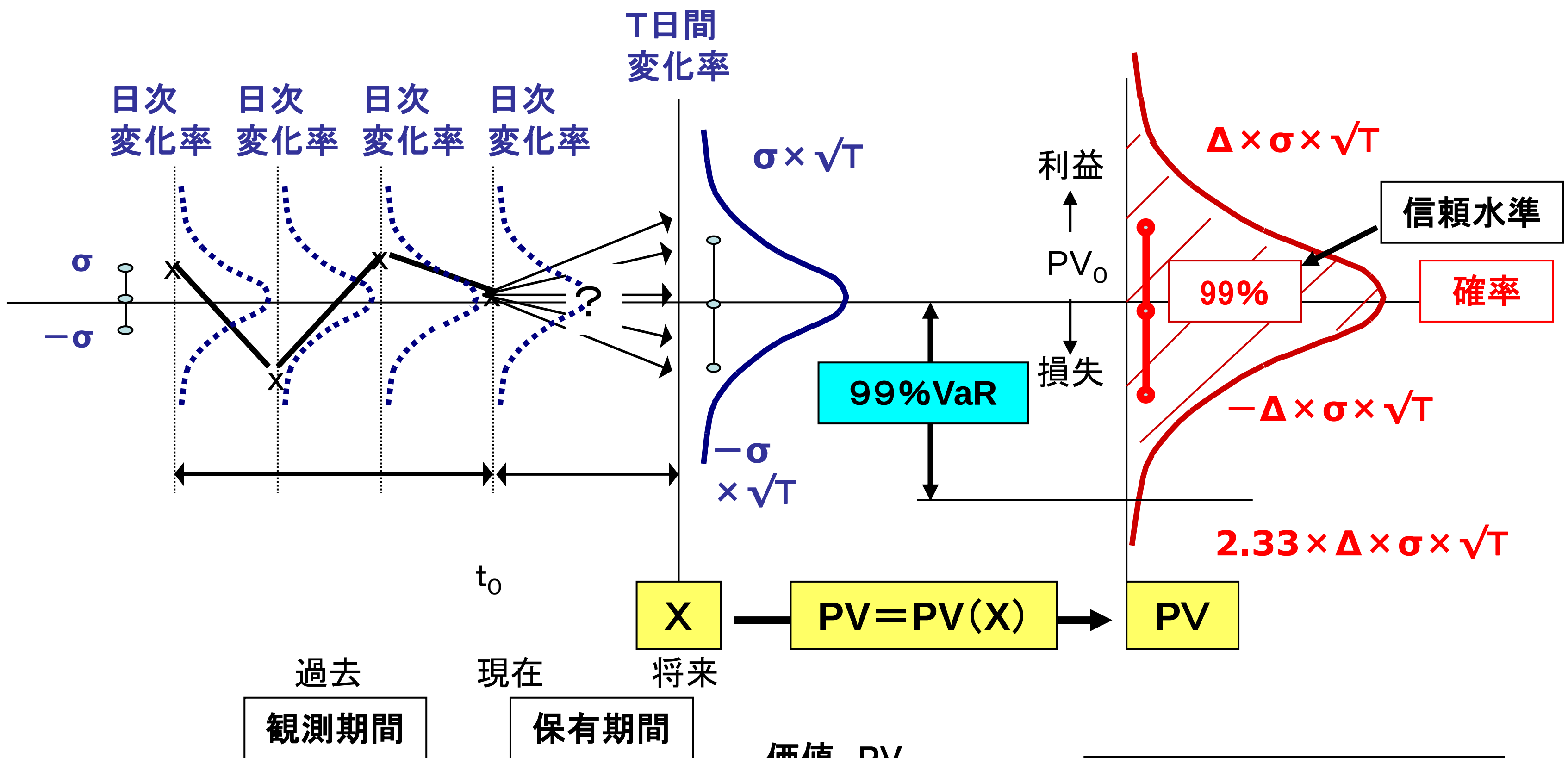
– 日次変化率の自己相関は弱いが、10日間変化率の自己相関は強いことが観察される。
– 統計的に厳密に検証すると、多くの時系列データが（日次変化率でみても10日間変化率でみても）独立とは言えないことが多い。

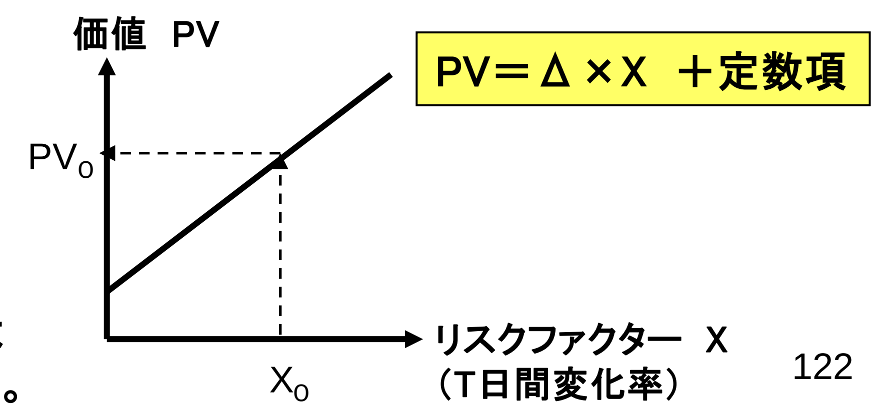
基本統計量	Excel関数	日次 対数変化率	10日間 対数変化率
データ数	COUNT	250	250
平均	AVERAGE	0.063	0.656
分散	VARA	1.540	14.966
標準偏差	STDEVA	1.241	3.869

- 分散をみると、10日間対数変化率の分散は、日次対数変化率の分散の概ね10倍となっている。

- 標準偏差をみると、10日間対数変化率の標準偏差は、日次対数変化率の標準偏差の概ね√10倍（＝3.162倍）となっている。

分散共分散法（ルートT倍法）





仮定①
リスクファクターの確率分布は
正規分布（ i. i. d. ）

仮定②
Δは一定、すなわち、ポートフォリオ価値PVは
リスクファクターの１次関数としてあらわされる。

	信頼係数		感応度		ボラティリティ
VaR ＝	2．33	×	Δ	×	σ ×√T

◆ VaRは、リスクファクターのボラティリティと、リスクファクターの変動に対する現在価値の感応度を考慮したリスク指標。

ボラティリティ ＝ リスクファクターがどれだけ変動するか
（σ×√T： 変化率の標準偏差）

感応度 ＝ ポートフォリオの現在価値の変動は、
リスクファクターの変動を受けて
どれだけ増幅されるか
（Δ： 関数式の傾き）

分散共分散法（ルートT倍法）の計算例

（例）投信残高（PV）　：100億円（東証TOPIX指数に完全連動）

リスクファクター（X_t）：　東証TOPIXの**日次・対数変化率**（注1）

⇒　X_tは、同一かつ互いに独立な正規分布にしたがって変動すると仮定。

観測期間　：　250日

保有期間　：　**10日間**

信頼水準　：　99%

VaR＝**信頼係数** × **感応度（Δ）** × **10日間対数変化率の標準偏差（σ_T）**

＝ **2.33** × **感応度（Δ）** × **日次対数変化率の標準偏差×$\sqrt{10}$**

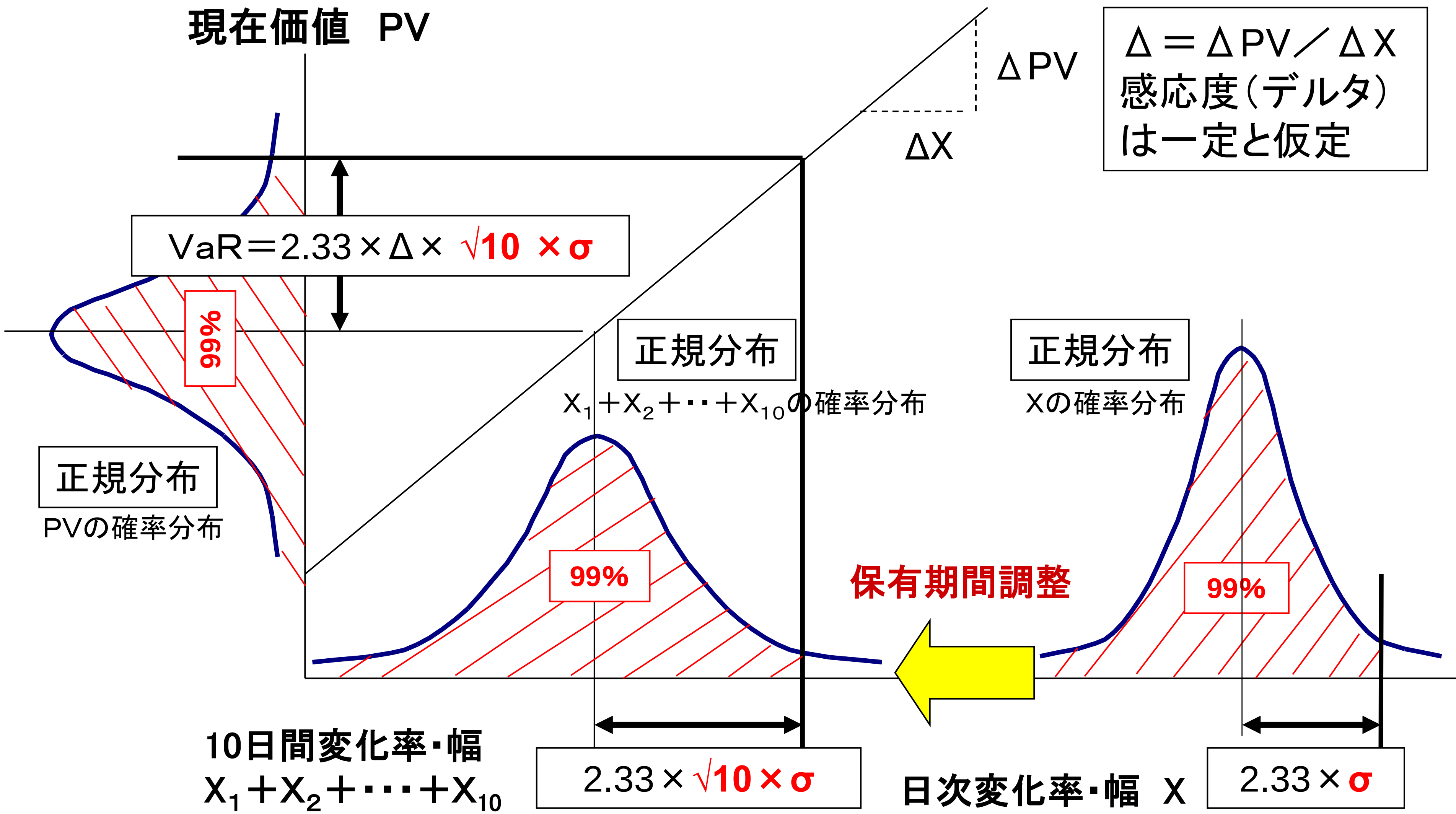
＝ **2.33** × **100億円**（注2） × **$\sigma \times \sqrt{10}$**

＝ **100億円**（注2） × **2.33** × **$\sigma \times \sqrt{10}$**

（注1）リスクファクターとしては、金利、為替、株価等の変化率（幅）を利用することが多い。

（注2）感応度（Δ）は100億円（＝現在価値の変動額÷東証TOPIXの10日間変化率）。

分散共分散法（ルートT倍法）によるVaR計測手法



分散共分散法(ルートT倍法)による計算例

VaRの計算シート

株式投信	100	億円
観測データ	250	

分散共分散法(デルタ法)(保有期間調整)

保有期間	10	日
信頼水準	99.00	%
信頼係数 (関数NORMSINV)	2.33	
日次・標準偏差 (関数STDEVA)	1.241	%
保有期間調整 (保有期間)^0.5	3.162	

↑　↓

正規分布を想定↑

↓信頼計数×日次・標準偏差×√T

予想変化率		感応度		VaR	
9.130	×	100	=	9.13	億円

	日次変化率
2006/9/29	0.508
2006/9/28	0.722
2006/9/27	2.651
2006/9/26	−0.667
2006/9/25	−0.245
2006/9/22	−1.048
2006/9/21	0.629
2006/9/20	−1.379
2006/9/19	−0.091
2006/9/15	−0.295
2006/9/14	0.917
2006/9/13	−0.153
2006/9/12	−0.661

$PV = \Delta * X$

PV : 株式投信価額

X : 東証TOPIX指数の変化率

Δ : 直近時点の株式価額 (PV_0) × 1

多変量の市場VaRの公式（分散共分散法）

①各リスクファクターが正規分布にしたがって変動し、

②各リスクファクターに対する当該資産・負債の現在価値の

感応度（デルタ）が一定であると仮定して、

VaRを算出する。

分散共分散法（デルタ法）の計算例
― リスクファクターが2つの場合

VaRの計算シート　　分散共分散法（MW法）

【ポートフォリオ】

株式投信	100	億円
10年割引国債	100	億円

保有期間	10	日
信頼水準	99.00	%

観測データ	250	日

	東証TOPIX 10日間変化率	10年割引国債 10日間変化率
2006/9/29	0.785	−0.098
2006/9/28	1.194	0.010
2006/9/27	0.319	0.177
2006/9/26	−2.994	0.315
2006/9/25	−3.783	0.688
2006/9/22	−3.139	0.560
2006/9/21	−3.894	−0.088
2006/9/20	−5.040	0.295
2006/9/19	−3.538	−0.010
2006/9/15	−2.474	0.098
2006/9/14	−2.248	−0.197
2006/9/13	−1.822	0.187
2006/9/12	−1.875	0.403
2006/9/11	−0.235	0.433
2006/9/8	0.007	0.118
2006/9/7	−0.591	1.179
2006/9/6	0.155	1.228
2006/9/5	0.582	1.051
2006/9/4	1.534	1.296
2006/9/1	−0.495	1.964
2006/8/31	0.184	1.837
⋮	⋮	⋮

	単独VaR		標準偏差	×信頼係数	×感応度
株式投信	9.00	＝	3.8686	2.33	100
割引国債	1.99		0.8568	2.33	100

	ポートVaR		
単純合算	10.99	①	
相関考慮後	8.35	②	①＞②：ポートフォリオ効果

投信VaR	国債VaR
9.00	1.99

相関行列

1	−0.4233
−0.4233	1

9.00	投信VaR
1.99	国債VaR

行列計算（関数MMULT）

8.1560	−1.8162

行列計算（同）

VaR^2：	69.78
VaR：	8.35

投信感応度	国債感応度
100.00	100.00

分散共分散行列

14.96626	−1.4031
−1.4031	0.7341395

100.00	投信感応度
100.00	国債感応度

行列計算（関数MMULT）

1356.3178	−66.8938

行列計算（同）

ポート分散：	12.89	（単位調整）
ポート標準偏差：	3.59	
信頼係数	2.33	
ポートVaR	8.35	

（リスクファクターが1変量の場合）

99%VaR＝信頼計数　×　Δ　×　σ

＝信頼係数×$\boxed{\sqrt{\Delta \times \sigma^2 \times \Delta}}$

＝信頼係数×$\boxed{\sqrt{\text{感応度} \times \text{分散} \times \text{感応度}}}$

（リスクファクターが多変量の場合）

99%VaR

＝信頼計数×

$$\sqrt{\overset{\text{（感応度）}}{\begin{pmatrix}\Delta_{X1} & \Delta_{X2} & \cdots & \Delta_{XN}\end{pmatrix}}\ \overset{\text{（分散共分散行列）}}{\begin{pmatrix} V_{X1} & cov(X_1、X_2) & \cdots & cov(X_1、X_N) \\ cov(X_1、X_2) & V_{X2} & \cdots & cov(X_2、X_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(X_1、X_N) & cov(X_N、X_2) & \cdots & V_{XN} \end{pmatrix}}\ \overset{\text{（感応度）}}{\begin{pmatrix}\Delta_{X1} \\ \Delta_{X2} \\ \vdots \\ \Delta_{XN}\end{pmatrix}}}$$

$$=\sqrt{\overset{\text{（単独VaR）}}{\begin{pmatrix}VaR(X_1) & VaR(X_2) & \cdots & VaR(X_N)\end{pmatrix}}\ \overset{\text{（相関行列）}}{\begin{pmatrix} 1 & \rho(X_1、X_2) & \cdots & \rho(X_1、X_N) \\ \rho(X_1、X_2) & 1 & \cdots & \rho(X_2、X_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(X_1、X_N) & \rho(X_N、X_2) & \cdots & 1 \end{pmatrix}}\ \overset{\text{（単独VaR）}}{\begin{pmatrix}VaR(X_1) \\ VaR(X_2) \\ \vdots \\ VaR(X_N)\end{pmatrix}}}$$

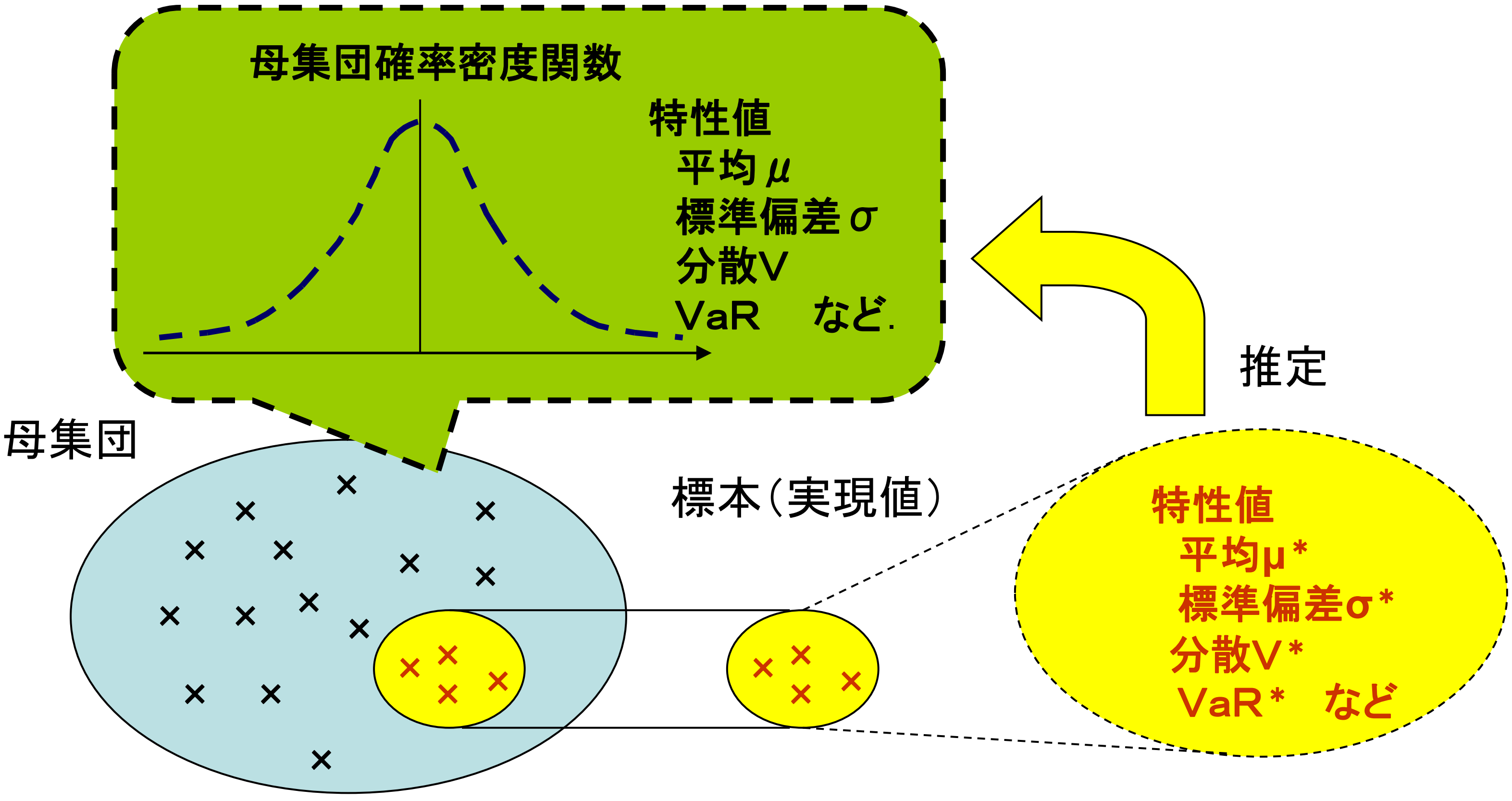
4. 推定と検定

（1） 推　定

（2） 検　定

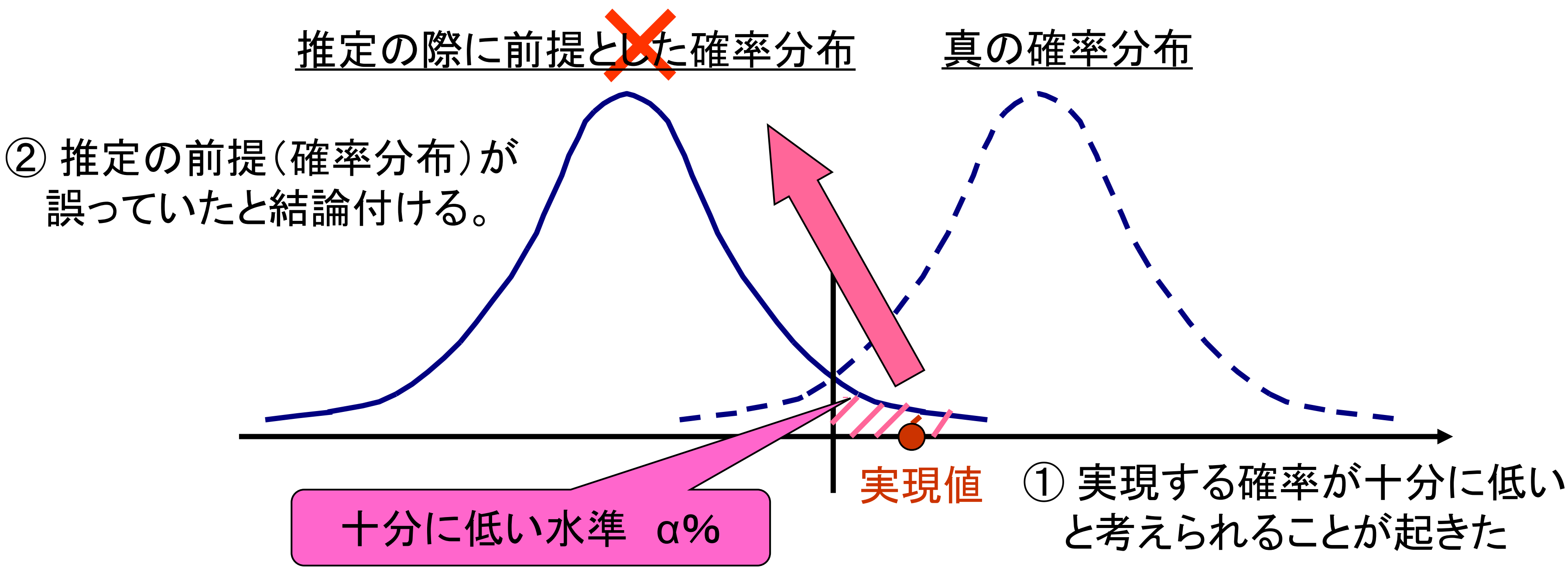
（1）推　定

- 母集団の確率分布、特性値は、誰にも分からない。
- 標本の特性値から母集団の特性値を統計的に推測する。



（2）検　定

・　一定の確率分布を前提にして推定した値について、
　その値をとる確率が十分に低いとき、
　「偶然、珍しいことが起きた」と考えるのではなく、
　「推定の際に置いた前提が誤っていた」
　と結論付ける。



（設問）

１の目がでやすいサイコロがあります。
サイコロを割ったり、X線透視などをせず、
サイコロを振るだけで、このサイコロが
「イカサマ」かどうかを決めたいと思います。

あなたは、このサイコロを６００回振って、
何回、１の目が出たら、「イカサマ」だと判断しますか？

１２０回で 「イカサマ」だと判断しますか？
１５０回で 「イカサマ」だと判断しますか？
２００回で 「イカサマ」だと判断しますか？
３００回で 「イカサマ」だと判断しますか？
４００回で 「イカサマ」だと判断しますか？

（例）1の目がでやすい「イカサマ・サイコロ」の見付け方

- このサイコロを振ったとき、1の目が出る確率は 1/6 である。

- このサイコロを600回振ったとき、1の目が？回以上発生した。

- このサイコロを振ったとき、1の目が出る確率が 1/6 だとすると、600回のうち？回以上、1の目が出る確率は十分に低い（例えば0.1%未満）ことが分かる。

- このサイコロを振ったとき、1の目が出る確率は 1/6 とは言えない。

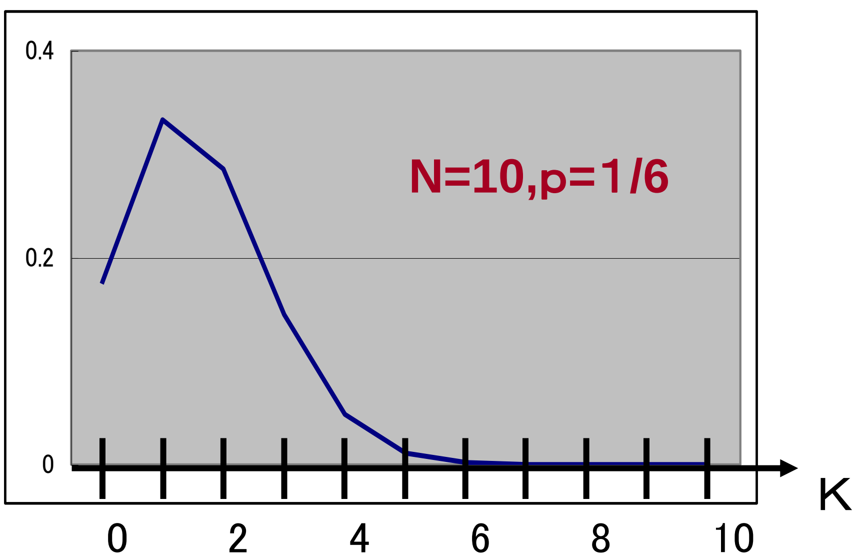
２項分布:

結果が2通りある試行（実験）をN回繰り返したとき、片方の結果が起こる回数（K）の確率分布。

試行回数（N回）と、片方の結果が起きる確率（p）を与えると分布の形状が決まる。

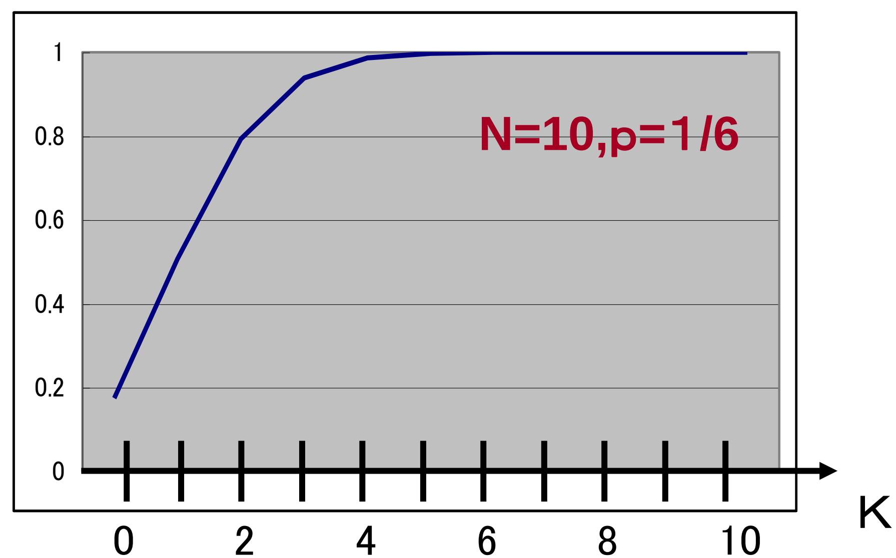
（例）サイコロを10回振って １の目が出る回数（K）

f（K） 確率密度関数



１の目が出る回数

F（K） 分布関数



１の目が出る回数

（例）サイコロを10回振ったときに2回、1の目が出る確率

BINOMDIST(2, 10, 1/6, false)

$$= {}_{10}C_2\ (1/6)^2\ (5/6)^{10-2} = \frac{10\times 9}{2\times 1}\times(1/6)^2\ (5/6)^8$$

（例）サイコロをN回振ったときにK回、1の目が出る確率

BINOMDIST(K, N, 1/6, false)

$$= {}_{N}C_K\ (1/6)^K\ (5/6)^{N-K}$$

２項分布：

ある事象が起きる確率は p。
N回の試行のうち、K回は
ある事象が起きる。

ある事象が起きない確率は1－p。
N回の試行のうち、N－K回は
ある事象は起きない。

<u>２項分布（Excel関数）</u>

BINOMDIST(K, N, p, false) $= {}_N C_K \, p^K (1-p)^{N-K}$

N回の試行の中から　ある事象が起きるK回の試行を
取り出す組み合わせ

$${}_N C_K = \frac{N \times (N-1) \times \cdots \times (N-K+1)}{K \times (K-1) \times \cdots \times 2 \times 1}$$

N回の観測で、K回、1の目が出る確率

２項分布 ${}_{N}C_{K}\ p^{K}(1-p)^{N-K}$

Ｎ＝600回

ｐ＝1/6

１－ｐ＝5/6

K回	確率	累積確率	K回以上
0	0.000%	100.000%	0回以上
100	4.264%	60.278%	100回以上
110	2.904%	20.634%	110回以上
120	0.652%	3.051%	120回以上
130	0.052%	0.184%	130回以上
140	0.002%	0.004%	140回以上
150	0.000%	0.000%	150回以上
160	0.000%	0.000%	160回以上
170	0.000%	0.000%	170回以上
180	0.000%	0.000%	180回以上
190	0.000%	0.000%	190回以上
200	0.000%	0.000%	200回以上
300	0.000%	0.000%	300回以上
400	0.000%	0.000%	400回以上
500	0.000%	0.000%	500回以上
600	0.000%	0.000%	600回以上

検定の一般的手続き

①「帰無仮説」を立てる。

② 「帰無仮説」 が「真」(true)であるという仮定の下に
「検定統計量」を決定する。

— ただし「検定統計量の確率分布は既知とする。

③試行や標本(サンプル)の抽出により、「検定統計量」
を計算する。

④「検定統計量」の実現値(計算値)がどの程度の確率
でおき得ることかを確認する。

⑤ 「検定統計量」の実現値(計算値)が十分に低い確率
(「有意水準」以下)でしかおきえないとき、「帰無仮説」
を棄却する。

2種類の過誤

- 「検定」では、次の2通りの「過誤」（エラー）が起きる可能性がある。
- したがって、バックテストの結果も 「過誤」（エラー）を伴っている可能性がある点、注意を要する。

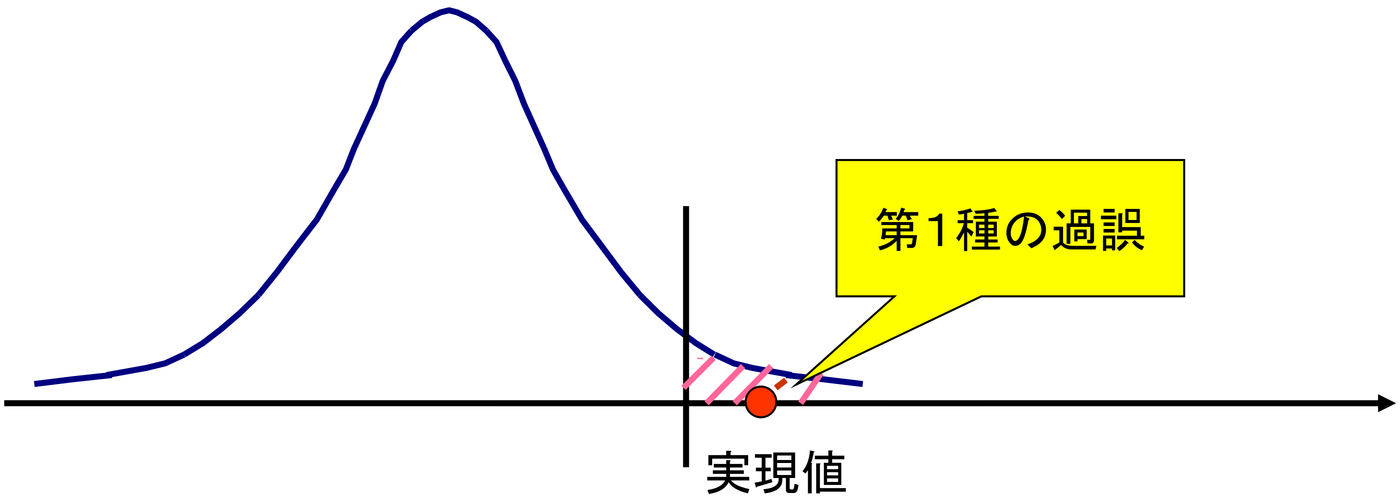
第１種の過誤（エラー）

本当は帰無仮説が正しいのに、
検定の結果、
帰無仮説が誤っていると結論付けてしまう。

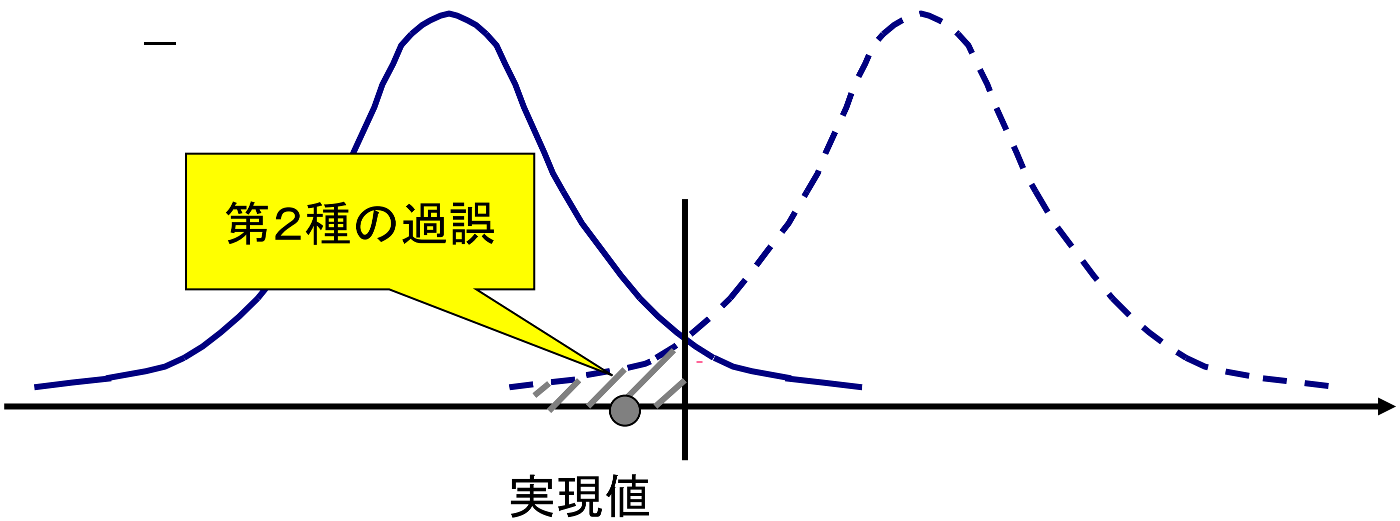
第２種の過誤（エラー）

本当は帰無仮説が正しくないのに、
検定の結果、
帰無仮説が正しいと結論付けてしまう。

推定に利用した確率分布 ＝ 真の確率分布



推定に利用した確率分布 ≠ 真の確率分布



VaR計測モデルのバックテストは

「検定」の考え方に基づいて行います。

バックテストによるVaRの検証

- VaRは、過去の観測データから統計的手法を用いて計測された推定値。バックテストによる検証を要する。

- VaRの計測後、事後的にVaRを超過する損失が発生した回数を調べる。

⇒　VaR超過損失の発生が、信頼水準から想定される回数を大幅に上回っていないか。

（参考）
バーゼル銀行監督委員会の3ゾーン・アプローチ

◆ 信頼水準99%、保有期間10日のトレーディング損益に関するVaR計測モデルについて、250回のうち何回、VaRを超過する損失が発生したかによって、その精度を評価する。

	超過回数	評　価
グリーン・ゾーン	0～4回 （2%未満）	モデルに問題がないと考えられる
イエロー・ゾーン	5～9回 （2%以上4%未満）	問題の存在が示唆されるが決定的ではない
レッド・ゾーン	10回以上 （4%以上）	まず間違いなくモデルに問題がある。

「マーケット・リスクに対する所要自己資本算出に用いる内部モデル・アプローチにおいてバックテスティングを利用するための監督上のフレームワーク」、1996年1月、バーゼル銀行監督委員会

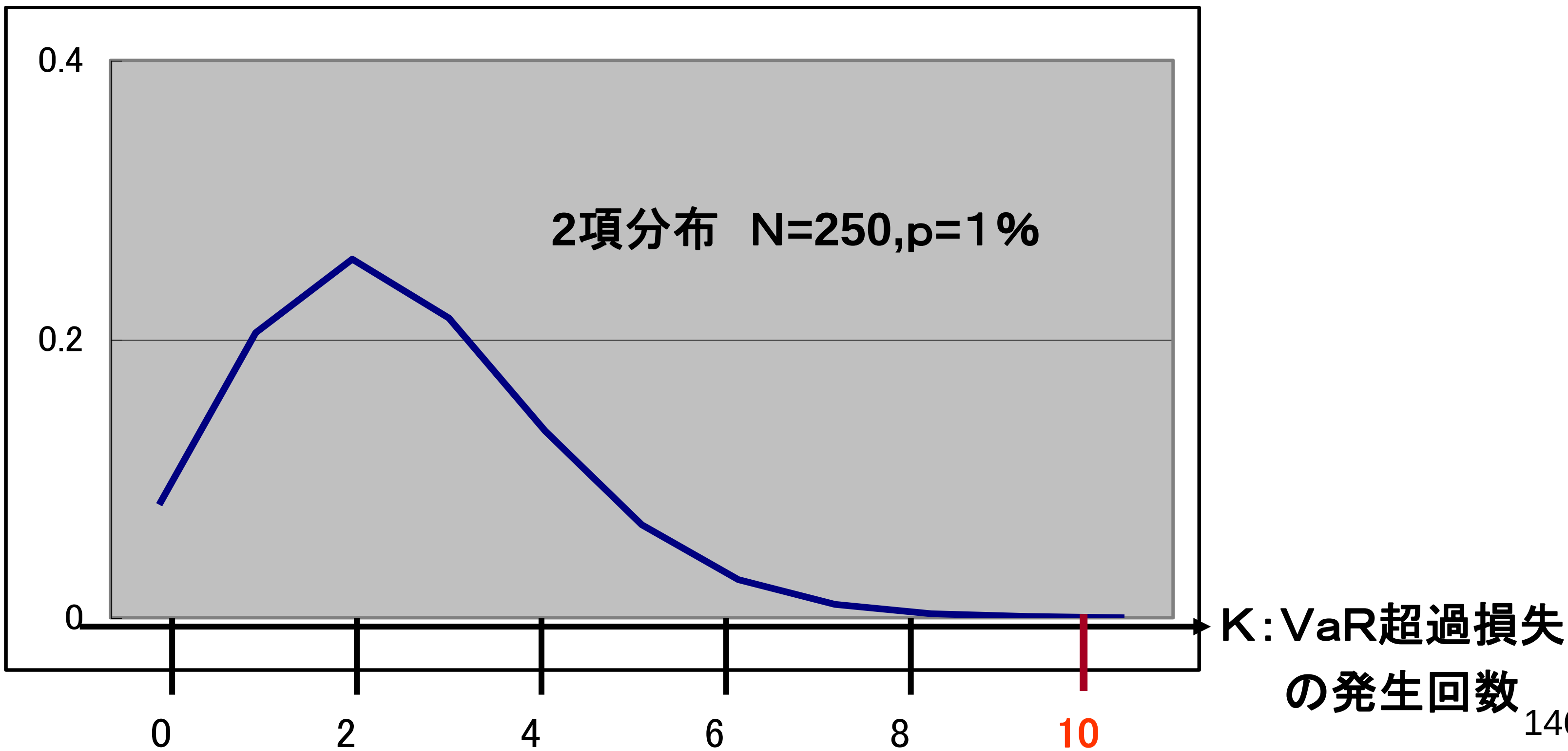
VaRを超過する損失が発生する回数（K）とその確率

VaRを超過する確率　　$p = 1\%$

VaRを超過しない確率　$1-p = 99\%$（信頼水準）

VaRの計測個数　　$N=250$

発生確率　$f(K) = {}_{250}C_K\,(0.01)^K\,(0.99)^{250-K}$



バックテスト（２項検定）

観測データ数	250	N回
信頼水準	99%	
１ー信頼水準	1%	p%

N回の観測で、K回、VaRを超過する確率

２項分布 $_{N}C_{K}\ p^{K}(1-p)^{N-K}$

VaR超過回数（K回）	確率	累積確率	VaR超過回数（K回以上）
0	8.11%	100.00%	0回以上
1	20.47%	91.89%	1回以上
2	25.74%	71.42%	2回以上
3	21.49%	45.68%	3回以上
4	13.41%	24.19%	4回以上
5	6.66%	10.78%	5回以上
6	2.75%	4.12%	6回以上
7	0.97%	1.37%	7回以上
8	0.30%	0.40%	8回以上
9	0.08%	0.11%	9回以上
10	0.02%	0.03%	10回以上
11	0.00%	0.01%	11回以上
12	0.00%	0.00%	12回以上
13	0.00%	0.00%	13回以上
14	0.00%	0.00%	14回以上
15	0.00%	0.00%	15回以上

バックテストは「検定」の考え方にしたがって行う。

- VaR計測モデルは正しい（帰無仮説）。

↓

- VaR超過損失の発生が、250回中、10回以上発生した。

↓

- VaR超過損失の発生が、250回中、10回以上発生する確率は0.03%と極めて低い。

↓

- VaR計測モデルは誤っている（結論）

分散共分散法・VaRの検証例

バックテストによるVaRの検証シート

【ポートフォリオ】

株式投信	100	億円
10年割引国債	100	億円

保有期間	10	日
信頼水準	99.00	%

観測データ	250	日

	東証TOPIX 10日間変化額	10年割引国債 10日間変化額	ポートフォリオ 10日間変化額	VaR（分散共分散法）			超過回数（超過1：範囲内：0）		
				株式投信	割引国債	ポート全体	7	4	6
2006/9/29	0.79	−0.10	0.69						
2006/9/28	1.19	0.01	1.20						
2006/9/27	0.32	0.18	0.50						
2006/9/26	−2.99	0.31	−2.68						
2006/9/25	−3.78	0.69	−3.10						
2006/9/22	−3.14	0.56	−2.58						
2006/9/21	−3.89	−0.09	−3.98						
2006/9/20	−5.04	0.29	−4.75						
2006/9/19	−3.54	−0.01	−3.55						
2006/9/15	−2.47	0.10	−2.38						
2006/9/14	−2.25	−0.20	−2.44	9.05	1.99	8.41	0	0	0
2006/9/13	−1.82	0.19	−1.63	9.04	2.00	8.40	0	0	0
2006/9/12	−1.87	0.40	−1.47	9.03	2.01	8.40	0	0	0
2006/9/11	−0.23	0.43	0.20	9.02	2.01	8.39	0	0	0
2006/9/8	0.01	0.12	0.12	9.02	2.03	8.40	0	0	0
2006/9/7	−0.59	1.18	0.59	9.02	2.05	8.40	0	0	0

ヒストリカル法・VaRの検証例

バックテストによるVaRの検証シート

【ポートフォリオ】

株式投信	100	億円
10年割引国債	100	億円

保有期間	10	日
信頼水準	99.00	%

観測データ	250	日

	東証TOPIX 10日間変化額	10年割引国債 10日間変化額	ポートフォリオ 10日間変化額	VaR(ヒストリカル法)			超過回数(超過1:範囲内:0)		
				株式投信	割引国債	ポート全体	9	5	12
2006/9/29	0.79	−0.10	0.69						
2006/9/28	1.19	0.01	1.20						
2006/9/27	0.32	0.18	0.50						
2006/9/26	−2.99	0.31	−2.68						
2006/9/25	−3.78	0.69	−3.10						
2006/9/22	−3.14	0.56	−2.58						
2006/9/21	−3.89	−0.09	−3.98						
2006/9/20	−5.04	0.29	−4.75						
2006/9/19	−3.54	−0.01	−3.55						
2006/9/15	−2.47	0.10	−2.38						
2006/9/14	−2.25	−0.20	−2.44	−8.43	−1.86	−7.77	0	0	0
2006/9/13	−1.82	0.19	−1.63	−8.43	−1.86	−7.77	0	0	0
2006/9/12	−1.87	0.40	−1.47	−8.43	−1.86	−7.77	0	0	0
2006/9/11	−0.23	0.43	0.20	−8.43	−1.86	−7.77	0	0	0
2006/9/8	0.01	0.12	0.12	−8.43	−1.86	−7.77	0	0	0
2006/9/7	−0.59	1.18	0.59	−8.43	−1.86	−7.77	0	0	0

VaR超過損失の発生原因・背景

- ストレス事象の発生
- ボラティリティの変化
  - VaR計測後、ボラティリティが増大
- 確率分布モデルの問題
  - 実際の確率分布が正規分布よりもファットテイル
- トレンド、自己相関がある
  - √T倍ルールでの近似に限界
- 観測データ数の不足
  - 観測データが不足すると、VaRは不安定化
- 観測期間が不適切
  - 遠い過去の観測データ（ボラティリティ小）の影響

参考文献・資料

「イラスト・図解　確率・統計のしくみが分かる本」
長谷川勝也　著　　技術評論社

「初等統計学」
P.G.ホーエル　著　　浅井晃、村上正康　訳　　培風館

ご清聴ありがとうございました。